Faculté des Sciences

# MATHEMATIQUES GENERALES II, F. Bastin
« MATH0009-6 »

## EXERCICES DE BASE

Bachelier en Biologie et en Géographie (Bloc 2)

Année académique 2025-2026 Jacqueline CRASBORN

# Introduction

## Généralités

Ce fascicule fournit aux étudiants les listes d'exercices à résoudre lors des répétitions du cours de MATHEMATIQUES GENERALES II (MATH0009-06) de l'année académique 2025-2026. Il présente aussi la résolution complète d'exercices de base (listes 2002/2003) et les solutions des exercices des listes 2003/2004 et 2004/2005 couvrant la matière de ce cours s'adressant aux futurs bacheliers de deuxième bloc en biologie et en géographie.

Ce fascicule a été rédigé pour répondre à divers objectifs. Il veut fournir aux étudiants une référence correcte sur laquelle s'appuyer pour tenter de résoudre les exercices proposés au cours des répétitions.

La rédaction de ce fascicule a également pour but d'insister sur le vocabulaire spécifique, les symboles mathématiques à utiliser, la rigueur exigée dans la rédaction, les liens indispensables qui doivent figurer entre les différentes étapes d'un développement mathématique. Trop souvent, en corrigeant des interrogations par exemple, on peut lire une succession de notations, d'équations, de calculs écrits les uns à côté des autres sans la moindre indication relative à la logique du raisonnement. C'est cet écueil aussi qu'on voudrait éviter aux étudiants grâce à ce fascicule.

Une dernière intention, et non la moindre, est d'amener les étudiants à prendre en charge leur formation de la façon la plus active et la plus autonome possible.

Pour terminer, je m'en voudrais de ne pas exprimer mes plus vifs remerciements à Françoise Bastin pour l'accueil qu'elle a réservé à cette initiative, les conseils qu'elle m'a donnés, sa relecture attentive et la confiance qu'elle me témoigne dans mon travail avec les étudiants. Je remercie également tous les assistants avec lesquels je travaille, tout spécialement Christine Amory, Rukiye Cavus et Safia Bennabi, pour leurs suggestions constructives et leur participation à l'élaboration de ce fascicule.

Jacqueline Crasborn
Année académique 2025 - 2026

## Informations relatives aux répétitions

### Compétences à entraîner

Lors des répétitions, avec l'aide des assistants, il est attendu que les étudiants s'entraînent aux compétences suivantes :

1) **la communication (orale et écrite)**
   — structurée (contexte, justifications, conclusion ...),
   — précise (vocabulaire et symboles adéquats, reflet exact de la pensée ...) ;
2) **le sens critique** (l'exercice a-t-il un sens ? le résultat est-il plausible ? ...) ;
3) **le raisonnement logique et la compréhension** (et non l'application d'une technique de calcul sans réflexion, par imitation ...) ;
4) **l'autonomie**
   — dans la recherche de pistes ou d'idées par l'utilisation, dans un premier temps, de documents (syllabus du cours, fascicules intitulés "'Bases" et "Exercices de base" ...) et, éventuellement dans un second temps, par une demande d'aide auprès de personnes-ressources pour répondre aux questions ou difficultés rencontrées,

— dans l'organisation et la planification de son travail ;

5) **la maîtrise des connaissances de base des mathématiques comme outil pour les sciences.**

## Consignes pour préparer une répétition

1. Répondre soigneusement aux questions de théorie de la première partie de chaque liste.
2. Il est vivement conseillé
   — de prendre connaissance des exercices à résoudre lors de la répétition future afin de détecter les difficultés qui pourraient être rencontrées lors de la résolution,
   — de dresser alors une liste de questions sur les difficultés rencontrées, questions à poser à l'assistant lors de la répétition

## Déroulement des répétitions

1. Dans le cas de notions qui semblent souvent poser problème aux étudiants, l'assistant résout 1 ou 2 exercices “modèle” pour leur permettre de se familiariser avec les exercices ayant trait à ces matières ; il fait participer les étudiants à leur résolution. Ensuite, l'assistant fera une synthèse du processus de résolution en mentionnant les éléments de théorie utilisés.
2. Enfin, chaque étudiant résout, seul ou avec son voisin, les exercices proposés dans la liste en cherchant les informations nécessaires dans ses documents. S'il reste bloqué malgré tout, il appelle alors l'assistant qui l'aidera dans sa recherche.

Tous les exercices de la liste doivent être résolus si possible pour la répétition suivante ; la plupart des étudiants seront obligés d'achever à domicile. Dans ce cas, s'ils rencontrent certaines difficultés, ils peuvent toujours en parler lors de la répétition suivante ou envoyer un courriel à l'un des assistants.

Les solutions des exercices proposés pour les répétitions se trouvent en fin de ce fascicule.

## Table des matières des répétitions pour 2025-2026

1. Fonctions élémentaires.
2. Décomposition de fractions rationnelles et approximations polynomiales.
3. Calcul intégral à une variable sur un ensemble borné fermé et calcul d'aires.
4. Calcul intégral à une variable sur un ensemble non borné fermé et nombres complexes.
5. Equations différentielles (1).
6. Equations différentielles (2) et Calcul matriciel (1).
7. Calcul matriciel (2).
8. Calcul matriciel (3).
9. Révisions.

**Il est possible que ce planning soit légèrement modifié en fonction de l'avancement du cours théorique. Toute modification sera mentionnée sur la page web du cours dont l'adresse suit**

**http ://www.afo.ulg.ac.be/fb/ens.html**

**Il est donc indispensable de la consulter régulièrement.**

L'équipe des assistants
Année académique 2025 - 2026

Version 17 décembre 2025

# AVERTISSEMENT

Les listes d'exercices résolus présentées dans ce fascicule sont celles des années académiques 2002/2003, 2003/2004 et 2004/2005. Elles ont été modifiées en fonction de la nouvelle version du cours de Mathématique de F. Bastin.

Les exercices des répétitions du cours Mathématiques générales II (MATH0009-06) pour l'année académique 2025-2026 se trouvent au chapitre 1. Ceux des années 2002/2003, 2003/2004 et 2004/2005 se trouvent dans les chapitres 2 et 3. Les solutions des exercices des répétitions se trouvent au chapitre 4.

Jacqueline Crasborn
Année académique 2025 - 2026

# Chapitre 1

# Listes d'exercices

## Liste 1 : fonctions élémentaires

### A préparer AVANT de venir à la répétition

**I. Manipulation des fonctions élémentaires**

1. Définir les fonctions sinus et cosinus de manière géométrique.
2. Donner la propriété faisant intervenir une somme et un produit
   (a) pour l'exponentielle
   (b) pour le logarithme népérien

**II. Limites des valeurs des fonctions**

1. Enoncer le théorème de la limite des fonctions de fonction.

**III. Continuité et dérivation**

1. (a) Quand dit-on qu'une fonction est dérivable en un point de son domaine de définition ?
   (b) Que vaut alors sa dérivée en ce point ?
2. (a) A quelle(s) condition(s) une fonction de fonction est-elle dérivable sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ ?
   (b) Que vaut alors sa dérivée sur cet intervalle ?
3. Donner les domaines de dérivabilité des fonctions élémentaires ainsi que leurs dérivées.
4. Donner les énoncés des théorèmes de dérivation
   (a) d'une combinaison linéaire de fonctions.
   (b) d'un produit de 2 fonctions.
   (c) d'un quotient de 2 fonctions.
5. Quel est le lien entre la dérivée d'une fonction (resp. sa dérivée seconde) et sa croissance (resp. sa concavité) ?

**IV. Théorème de l'Hospital**

1. (a) Quelles sont les hypothèses à vérifier pour l'application du théorème de l'Hospital ?
   (b) Si ces hypothèses sont vérifiées, quelle est la thèse du théorème de l'Hospital ?

ATTENTION : lors de l'application du théorème de l'Hospital,

$$\lim_{x\to a}\frac{Df(x)}{Dg(x)} = l^+ \textbf{ n'entraîne pas } \text{que } \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = l^+.$$

---

# Exercices

**Lors de la répétition, les exercices I. ex 1 ($f_2 - f_5$ ), ex 2 ($f_1 - f_4$), II. ex 1 (b-c-d), III. ex 1 (c), ex 2 (e-g-h), IV. ex 1 ($f_5$) et V. ex 1 (2-5-9-12) seront résolus par l'assistant**

## I. Eléments de base relatifs aux fonctions

1. Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous. Si la fonction est composée, mentionner de quelles fonctions élémentaires elle est la composée

$$f_1(x) = \frac{1}{2-|x+1|},\quad f_2(x) = \ln(-x^2-2x+3),\quad f_3(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}},\quad f_4(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}$$

$$f_5(x) = \ln(e^x-1),\quad f_6(x) = \ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right),\quad f_7(x) = \arcsin(x^2-1)$$

2. Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous et les représenter graphiquement (uniquement en se servant des symétries et des représentations graphiques de ln et de l'exponentielle).

$$f_1(x) = \ln(-x),\quad f_2(x) = -\ln\left(\frac{1}{|x|}\right),\quad f_3(x) = |-\ln(x)|,\quad f_4(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f_5(x) = -\exp(x),\quad f_6(x) = \exp(x+1),\quad f_7(x) = \exp(x)+1$$

## II. Manipulation des fonctions élémentaires

1. Simplifier les expressions suivantes au maximum

$$(a)\ \ln(\cos(\pi/3)) + \ln\left((\sin(4\pi/3)^2\right),\quad (b)\ \tan\left(\ln(e^{3\pi}/2)\right),\quad (c)\ \exp(3\ln(2e)),\quad (d)\ \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$(e)\ \arcsin\left(\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right),\ (f)\ \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\ (g)\ \tan\left(\arctan\left(\frac{\pi}{2}\right)\right),\ (h)\ \arctan\left(\tan\left(\frac{4\pi}{7}\right)\right).$$

## III. Limites des valeurs des fonctions

1. Se rappeler les limites relatives aux fonctions élémentaires et en déduire rapidement les quelques limites suivantes

$$(a)\ \lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{1}{x}\right),\quad (b)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\ln(x^2)},\quad (c)\ \lim_{x\to 1^+}\arctan\left(\frac{1}{x-1}\right).$$

2. Calculer (si possible) les limites suivantes, ***sans appliquer le théorème de l'Hospital***

$$(a)\ \lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}\qquad (b)\ \lim_{x\to+\infty}(-x^2-2x)\qquad (c)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+x^6}}{x^3}$$

$$(d)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{cotan}(x)}{\sin(3x)}\qquad (e)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{\sin(2x)}\qquad (f)\ \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{|1-x|}$$

$$(g)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^2+5x}{x^2+3}\qquad (h)\ \lim_{x\to+\infty}(\ln(3x+2)-\ln(3x))\qquad (i)\ \lim_{x\to+\infty}\ln(|-x+\pi|)$$

## IV. Continuité et dérivation

1. On donne des fonctions par les expressions explicites suivantes. En déterminer le domaine de définition, de continuité, de dérivabilité et en calculer la dérivée première.

$$f_1(x) = \sqrt[5]{3x^2+1} \qquad f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2+x}} \qquad f_3(x) = \frac{1}{3x^2+6x+3} \qquad f_4(x) = \arctan(\cos(x))$$

$$f_5(x) = \sqrt{\sin 2x} \qquad f_6(x) = \sin(\cotan(x)) \qquad f_7(x) = \ln(x^4) \qquad f_8(x) = \ln(x^2+x-2)$$

2. On donne la fonction $g$ dérivable sur $]-1,1[$ et la fonction $f : t \mapsto f(t) = g(\ln(t))$.
   (a) Déterminer le domaine de dérivabilité de $f$.
   (b) Calculer la dérivée de $f$ en fonction de la dérivée de $g$.
   (c) Mêmes questions si $g$ est dérivable sur $]0,3[$ et si $f$ est la fonction $y \mapsto f(y) = g(\sqrt{y^2-1})$.
3. Soit $F : t \mapsto F(t) = f(x(t))$ avec $x(3) = 2$, $Dx(3) = 5$ et $(D_x f)(2) = -4$. En supposant $F$ dérivable en 3, que vaut $(DF)(3)$ ?

## V. Théorème de l'Hospital

1. Calculer les limites suivantes (dans chaque cas, si ce n'est pas possible ou si elle n'existe pas, en donner la raison)

$$(1)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(2x)}{x+1} \qquad (2)\ \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(2+\frac{1}{x}\right) \qquad (3)\ \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(2x)}{x}$$

$$(4)\ \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x^3}\ln(\sqrt[5]{x}) \qquad (5)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1/|x|)}{\sqrt{x^2}} \qquad (6)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2+1}{\arctan(x^2+2)}$$

$$(7)\ \lim_{t\to 1^+} (1-t)\ln(t^2-1) \qquad (8)\ \lim_{x\to 2^-} \frac{\ln(x-2)}{|2-x|} \qquad (9)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2-3x-4)}{x-4}$$

$$(10)\ \lim_{x\to+\infty} \big(\ln(|2-x|)-\ln(x^2)\big) \qquad (11)\ \lim_{x\to\pi} \frac{1+\cos(x)}{\sin(x)} \qquad (12)\ \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3}$$

$$(13)\ \lim_{u\to+\infty} \frac{u^2}{e^{3u}} \qquad (14)\ \lim_{y\to-\infty} y\,e^{-y^2} \qquad (15)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{\sqrt{\exp(x^2)}}$$

# Liste 2 : décomposition de fractions rationnelles et approximations polynomiales

## A préparer AVANT de venir à la répétition

### I. Décomposition en fractions simples

1. Définir
   (a) fraction rationnelle
   (b) fraction rationnelle propre
   (c) fraction rationnelle simple
2. Quel est le processus à suivre pour décomposer une fraction rationnelle en une somme de fractions simples ?

### II. Approximations polynomiales

1. Qu'appelle-t-on approximation polynomiale d'une fonction en un point de son domaine de définition ?
2. Quelle forme cette approximation a-t-elle quand la fonction est suffisamment dérivable ?
3. (a) Enoncer le résultat appelé « Développement limité de Taylor ».
   (b) Relier ce résultat aux notions d'approximation polynomiale et de reste de l'approximation polynomiale d'une fonction en un point.

---

## Exercices

**Lors de la répétition, les exercices I. ex 1 (f-g) ainsi que II. ex 1 ($f_2$) et ex 2 seront résolus par l'assistant.**

### I. Décomposition en fractions simples

1. Décomposer les fractions rationnelles suivantes en fractions rationnelles simples à coefficients réels.

$$(a)\ \frac{1}{x^2-4x+4},\quad (b)\ \frac{x}{-x^2+2x+3},\quad (c)\ \frac{2}{x(x^2-4x+4),}\quad (d)\ \frac{x^2+1}{3x+1}$$

$$(e)\ \frac{x^2-2}{x^2+2},\quad (f)\ \frac{x^3}{x^3+1},\quad (g)\ \frac{x}{x^2+1}$$

### II. Approximations polynomiales

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre $n$ en $x_0$ pour la fonction $f_k$. Représenter $f_2$ ( —-ou $f_3$ ou $f_5$— ) et ses approximations. Pour $f_5$,
   a) donner une expression explicite du reste de ces approximations.
   b) indiquer où se situe le graphique de $f_5$ au voisinage de 0 par rapport à celui de chacune des approximations en tenant compte du point précédent.

   $f_1(x) = \cos(x)\, e^{3x},\ x_0 = 0, n = 0, 1, 2, 3$ $\quad$ $f_2(x) = \sqrt{1+9x},\ x_0 = 0, n = 0, 1, 2$
   $f_3(x) = 1/(1-2x),\ x_0 = 0, n = 0, 1, 2$ $\quad$ $f_4(x) = \arctan(x),\ x_0 = 0$ (resp. $x_0 = 1$), $n = 0, 1, 2$
   $f_5(x) = \cos^2(x),\ x_0 = 0,\ n = 0, 1, 2$ $\quad$ $f_6(x) = \sin(x),\ x_0 = 1, n = 0, 1, 2$

2. Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 3 en 0 de la fonction cos et en estimer le reste. Représenter la fonction et cette approximation dans le même repère orthonormé.

3. La force de marée agissant sur une masse $m$ peut être définie comme la différence entre l'attraction de la Lune sur cette masse située à la surface de la Terre et l'attraction de la Lune sur cette masse en supposant qu'elle est au centre de la Terre. Si on désigne par $R$ le rayon terrestre, $d$ la distance [1] Terre-Lune, $G$ la constante de gravité, $M$ la masse de la Lune, on peut alors écrire

$$F = \frac{GMm}{(d-R)^2} - \frac{GMm}{d^2}$$

en un point de la surface terrestre situé sur la droite joignant le centre de la Terre et le centre de la Lune. En tenant compte du fait que le rapport $R/d$ est petit, une expression approximative (simplifiée) de la force $F$ est donnée par

$$F^{Approx} = \frac{2GMmR}{d^3}.$$

Expliquer pourquoi une approximation de $F$ est donnée par l'expression précédente.

1. entre les centres respectifs

# Liste 3 : Calcul intégral à une variable sur un ensemble borné fermé et calcul d'aires

## A préparer AVANT de venir à la répétition

### I. Calcul d'intégrales sur un ensemble borné fermé

1. Donner une condition suffisante pour qu'une fonction soit intégrable sur un intervalle borné fermé de $\mathbb{R}$.
2. Comment les primitives permettent-elles de calculer une intégrale ?
3. Citer l'énoncé du théorème d'intégration par variation de primitive

### II. Calcul d'aires

Quelle est l'interprétation graphique de l'intégrale d'une fonction continue à valeurs positives (resp. négatives) sur un intervalle borné fermé de $\mathbb{R}$ ?

## Exercices

**Lors de la répétition, les exercices de calcul intégral I. ex 2 (3-7-9), II. ex 1 et ex 2 seront résolus par l'assistant.**

### I. Calcul d'intégrales sur un ensemble borné fermé

1. Soit $a > 0$. Démontrer et interpréter graphiquement que
   (a) si $f$ est une fonction continue et paire sur $[-a, a]$, alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$
   (b) si $f$ est une fonction continue et impaire sur $[-a, a]$, alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$
2. Calculer les intégrales suivantes (si c'est possible)

| | | |
|---|---|---|
| (1) $\int_{-2}^{1} (x^2 + 2x)\ dx$ | (2) $\int_{-1}^{1} xe^x\ dx$ | (3) $\int_{-1}^{0} xe^{-x^2}\ dx$ |
| (4) $\int_{1/2}^{3} \sqrt{3 + \frac{x}{2}}\ dx$ | (5) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \sin^2(x)\ dx$ | (6) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \text{cotan}^2(x)\ dx$ |
| (7) $\int_{0}^{\pi} x\sin^2(x)\ dx$ | (8) $\int_{0}^{\pi/2} \cos(x)\sin^2(x)\ dx$ | (9) $\int_{-1}^{4} \frac{x+1}{x+2}\ dx$ |
| (10) $\int_{-1}^{1} \arctan(x)\ dx$ | (11) $\int_{-2}^{2\sqrt{3}} \frac{1}{4+x^2}\ dx$ | (12) $\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\ dx$ |

3. En cartographie, sur une carte de Mercator, l'ordonnée d'un point proche de l'équateur et dont la latitude est $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}[$, est donnée par

$$y(\varphi) = R\int_{0}^{\varphi} \frac{1}{\cos(u)} du.$$

   Montrer que

$$y(\varphi) = R\ \ln\left(\left|\tan\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|\right).$$

**II. Calcul d'aires**

1. Calculer l'aire de la partie du plan dont une description analytique est la suivante
$$\left\{(x,y) : x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right], y \in \mathbb{R} \text{ et } \cos(x) \leq y \leq \sin(2x)\right\}.$$
Donner aussi une représentation graphique de cet ensemble.

2. Calculer l'aire de la partie du plan dont une description analytique est la suivante
$$\left\{(x,y) : x \in [-2,1],\ y \in [x-1, 1-x^2]\right\}.$$
Donner aussi une représentation graphique de cet ensemble.

3. On considère l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 2x,\ y \geq x^2\}$. Donner une représentation graphique de cet ensemble en le hachurant et calculer l'aire de cette région du plan.

# Liste 4 : Calcul intégral à une variable sur un ensemble non borné fermé et nombres complexes

## A préparer AVANT de venir à la répétition

### I. Calcul d'intégrales sur un ensemble non borné fermé

1. Soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle $[a,b[$ de $\mathbb{R}$, $a,b \in \mathbb{R}$ ( ou $b=+\infty$).
   (a) Donner la définition de l'intégrabilité de $f$ sur $[a,b[$.
   (b) Que devient-elle si $f$ est à valeurs positives (resp. négatives) sur $[a,b[$ ?
   (c) Donner la définition de l'intégrale de $f$ sur $[a,b[$ si $f$ y est intégrable.
2. Soit $s \in \mathbb{R}$. Quand la fontion $f$ définie par $f(x)=x^s$ est-elle intégrable sur $]0,1]$ (resp. sur $[1,+\infty[$) ?
3. Quelles sont les principales techniques d'intégration ?

### II. Les nombres complexes

1. Définir un nombre complexe puis en donner sa notation pratique.
2. Définir les parties réelle et imaginaire, le conjugué et le module d'un nombre complexe.
3. Dans le plan complexe,
   (a) quelle est l'interprétation graphique du module d'un nombre complexe ?
   (b) que dire de la représentation d'un nombre complexe et de son conjugué ?
4. Que peut-on dire des puissances naturelles de $i$ ?
5. Si $z$ est un nombre complexe non nul, comment rendre réel le dénominateur de $1/z$ ?
6. Si $z=a+ib$ $(a,b\in\mathbb{R})$, en donner la forme trigonométrique.
   Quel lien peut-on faire avec les coordonnées polaires ?
7. Quelles différences y a-t-il entre la résolution et les solutions d'une équation du second degré dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ ?

---

## Exercices

**Lors de la répétition, les exercices I. ex 1 (2-7-9) ainsi que les exercices II. ex 1 (2-4) et ex 4 (1-2) seront résolus par l'assistant**

### I. Calcul d'intégrales sur un ensemble non borné fermé

1. Calculer les intégrales suivantes (si c'est possible)

(1) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_{-1}^0 \ln(x^2)\,dx$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^e x\ln(|x|))\,dx$ (4) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{9x^2+4}\,dx$

(5) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{9x^2-4}\,dx$ (6) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-2x+1}\,dx$

(7) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx$ (8) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^2+2x-3}\,dx$

(9) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\pi/3} \cos(2x)\,e^x\,dx$ (10) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,e^{2x}\,dx$

(11) $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,dx$ (12) $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{1}{x^2-4}\,dx$

## II. Les nombres complexes

1. Déterminer les partie réelle, imaginaire, le conjugué et le module de chacun des complexes ci-dessous. Représenter ces complexes dans le plan muni d'un repère orthonormé (≪ $X$ = axe réel ≫ et ≪ $Y$= axe imaginaire ≫)

$$i+1, \quad (-i+1)(-1-2i), \quad \frac{1}{-i+1}, \quad \frac{i^7}{i-1}, \quad (1-i)^2$$

2. Déterminer la forme trigonométrique des complexes suivants et les représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé (≪ $X$ = axe réel ≫ et ≪ $Y$= axe imaginaire ≫)

$$-i, \quad i+1, \quad \frac{1}{2}(\sqrt{3}-i).$$

3. On suppose que $\alpha$ est un nombre réel. Déterminer les partie réelle, imaginaire, le conjugué et le module de chacun des complexes ci-dessous. Représenter ces complexes dans le plan muni d'un repère orthonormé (≪ $X$ = axe réel ≫ et ≪ $Y$= axe imaginaire ≫) en supposant que $\alpha$ appartient à l'intervalle $[\pi/2, \pi[$

$$\cos(\alpha) - i\sin(\alpha), \quad \frac{1}{\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)}, \quad (\cos(1) + i\sin(1))(\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)), \quad \sin(2\alpha) - i\cos(2\alpha).$$

4. Résoudre les équations suivantes et représenter les solutions dans le plan muni d'un repère orthonormé (≪ $X$ = axe réel ≫ et ≪ $Y$= axe imaginaire ≫)

(1) $z^2+8=0$ (2) $27z^3+1=0$ (3) $z^2+2=iz$ (4) $z^2-z+1+i=0$ (5) $z^2-(1-2i)z=1+i$

# Liste 5 : Équations différentielles (1)

## A préparer AVANT de venir à la répétition

**I. Equations différentielles**

1. Définir une EDLCC [2] d'ordre 1.
2. Donner l'équation homogène associée à cette équation.
3. Donner l'équation caractéristique associée à cette équation homogène.
4. Donner l'ensemble des fonctions solutions de l'équation homogène.
5. De combien de constantes arbitraires les solutions dépendent-elles ?
6. Répondre aux mêmes questions pour une EDLCC d'ordre 2.
7. Quelle est la forme générale de toute solution d'une EDLCC ?
8. a) Qu'appelle-t-on « méthode des exponentielles polynômes » ?
   b) Comment détermine-t-on une solution particulière dans ce cas pour une équation d'ordre 1 (resp. d'ordre 2) ?
   c) Si le second membre ne s'écrit pas sous la forme d'un produit d'une exponentielle par un polynôme, mais n'est, par exemple, qu'un polynôme ou un cosinus ou ... comment peut-on envisager d'utiliser quand même cette méthode ?
9. Quel est le processus à suivre pour résoudre une EDLCC ?

## Exercices

**Lors de la répétition, les exercices suivants seront résolus par l'assistant : II. ex 2 (7-8-9)**

**I. Quelques manipulations**

1. Si l'équation différentielle $(D_t y)^2 = 2y$ admet 2 solutions distinctes non nulles, peut-on affirmer qu'une combinaison linéaire de ces solutions est encore solution de cette équation ?
2. Montrer que la fonction $g(t) = 3t^2 - 6t + 2,\ t \in \mathbb{R}$, vérifie le système
$$\begin{cases} (D_t y)^2 = 12(y+1) \\ y(0) = 2 \\ y(2) = 2 \end{cases}$$
3. Montrer que la fonction $g(t) = \operatorname{cotan}(t) - 1/\sin(t),\ t \in ]0, \pi/2[$, vérifie l'équation $2\,Dy + y^2 = -1$.
4. Montrer que la fonction $u : x \mapsto C_1\, e^{C_2 x},\ x \in \mathbb{R}$, $C_1$ et $C_2$ étant des constantes complexes arbitraires, vérifie l'équation $v\ D^2 v - (Dv)^2 = 0$.
5. Montrer que la fonction $x \mapsto \tan(x) + 1/\cos(x),\ x \in ]0, \pi/2[$, vérifie l'équation $2Df - f^2 = 1$.

**II. Résolution d'équations différentielles**

1. Résoudre les équations différentielles suivantes, en spécifiant dans quel intervalle on travaille

   1) $4Df + 2if = 0$  2) $D^2 f = 2f$  3) $D^2 f = 0$

   4) $D^2 f + Df - 2f = 0$  5) $4D^2 f - f = 0$  6) $D^2 f + f = 0$

2. abréviation pour « équation différentielle linéaire à coefficients constants »

2. Résoudre les équations différentielles suivantes, en spécifiant dans quel intervalle on travaille (pour l'équation 3, en donner aussi les solutions réelles)

| | |
|---|---|
| 1) $D^2f(x) + Df(x) - 2f(x) = e^x + 4x^2e^{2x} + 1$ | 2) $4D^2f(x) - f(x) = \cos^2(x) - 1/2$ |
| 3) $D^2f(x) + f(x) = x\,e^{2x}$ | 4) $D^2f(x) + 2Df(x) + f(x) = (2 + \cos(x))e^{-x}$ |
| 5) $D^2f(x) - f(x) = 1 + x^2$, | 6) $9D^2f(x) - Df(x) = 1$ |
| 7) $D^2f(x) - 4f(x) = 1 + e^{2x}$, | 8) $D^2f(x) + 4f(x) = \sin(4x)$ |
| 9) $Df(x) - 2f(x) = xe^{2x}$, | 10) $2Df(x) + 3f(x) = x^2 + 1$ |

3. Résoudre le système suivant, en spécifiant dans quel intervalle on travaille

$$\begin{cases} 4D^2f(x) + f(x) = x^2 + x + 2 \\ f(0) = 0 \\ Df(0) = 2 \end{cases}$$

4. Résoudre l'équation différentielle suivante en précisant l'intervalle sur lequel on travaille.

$$2D^2f(x) + Df(x) = 2x$$

Déterminer ensuite la solution qui vaut 1 en 1 et dont la dérivée première vaut 0 en 1.

# Liste 6 : équations différentielles (2) et calcul matriciel (1)

## A préparer AVANT de venir à la répétition

### I. Définitions et opérations

1. Qu'appelle-t-on le type (ou le format) et la dimension d'une matrice ?
2. Etant donné une matrice A, définir
   (a) sa matrice conjuguée,
   (b) sa matrice transposée,
   (c) sa matrice adjointe.
3. Définir les opérations suivantes et en donner les propriétés :
   (a) addition de deux matrices du même type,
   (b) multiplication d'une matrice par un nombre complexe,
   (c) multiplication de deux matrices.

---

## Exercices

**Lors de la répétition, les exercices I. ex 1 et II. ex 1 (2 - 7) seront résolus par l'assistant.**

### I. Equations différentielles : divers

1. Dans certaines conditions, la température de surface $y(t)$ d'un objet change au cours du temps selon un « taux » proportionnel à la différence entre la température de l'objet et celle du milieu ambiant, que l'on suppose constante et que l'on note $y_0$. On obtient ainsi l'équation différentielle
$$Dy(t) = k(y(t) - y_0)$$
où $k$ est une constante strictement négative. Cette équation est appelée « Newton's law of cooling » et elle est utilisée notamment pour déterminer le temps entre la mort d'un individu et la découverte de son corps.
Résoudre cette équation et montrer alors que la température de l'objet se rapproche de la température ambiante au fur et à mesure que le temps passe.
2. Depuis un recensement de la population d'un pays, on constate que la vitesse d'accroissement de la population est, à tout instant, proportionnelle au nombre d'habitants à cet instant. Après combien de temps depuis ce recensement cette population sera-t-elle triple sachant qu'elle a doublé en 50 ans ?
3. La vitesse initiale d'une balle roulant sur un sol horizontal est de 10 m/s. Vu les frottements, la vitesse décroît avec un taux constant de 2 m/s$^2$. Quand la balle sera arrêtée, quelle distance aura-t-elle parcourue depuis son point de départ ?
4. Déterminer la valeur de la constante $c$ de telle sorte que la fonction $f(x) = 3x^2,\ x \in \mathbb{R}$ soit une solution de l'équation différentielle
$$c\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\frac{dy}{dx} - y = 0$$

5. Soit $L$ la longueur d'un pendule et soit $T$ sa période d'oscillation. Si les oscillations sont petites et si le pendule n'est soumis à aucune force autre que la gravité, alors un modèle liant $T$ et $L$ est l'équation différentielle
$$\frac{dT}{dL} = \frac{T}{2L}.$$
Montrer que cela implique que la période $T$ est proportionnelle à la racine carrée de la longueur $L$.

## II. Opérations entre matrices

1. Soient les matrices $A$, $B$, $C$ données par
$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & i \\ 1+i & -1 \\ 3/i & (2-i)^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ i & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1/(i+1) \\ -2i & i/2 \end{pmatrix}.$$
Si possible, effectuer les opérations suivantes (et simplifier la réponse au maximum). Si cela ne l'est pas, en expliquer la raison.
$$1)\ A+B,\ 2)\ A+\widetilde{B},\ 3)\ AB,\ 4)\ AB+C,\ 5)\ BA,\ 6)\ C\widetilde{A},\ 7)\ A^*C,\ 8)\ iC,\ 9)\ (iA)^*.$$

2. Soit $A$ une matrice carrée de dimension 3 telle que $A_{lk} = 1$, $\forall l, k$ et
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Calculer $C = AB - BA$ et en déduire la forme de $\widetilde{C} + C$.

3. Montrer que $A^2 - 2A + 3\,\mathbb{1} = 0$ avec
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Déterminer la forme générale des matrices qui commutent avec la matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

# Liste 7 : calcul matriciel (2)

## A préparer AVANT de venir à la répétition

### I. Définitions et opérations

1. Qu'appelle-t-on le déterminant d'une matrice ? Peut-on toujours le définir ?
2. Citer les propriétés liées aux déterminants.
3. Qu'appelle-t-on matrice inverse d'une matrice carrée donnée ?
4. Quelle est la forme explicite de la matrice inverse lorsqu'elle existe ?
5. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice inverse d'une matrice carrée donnée existe.

### II. Valeurs propres et vecteurs propres

1. Etant donné une matrice carrée A,
   (a) qu'appelle-t-on valeur propre de A ?
   (b) qu'appelle-t-on vecteur propre de A ?
2. En pratique, comment détermine-t-on les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice carrée ?
3. Qu'appelle-t-on matrice diagonale ?
4. Qu'appelle-t-on matrice diagonalisable ?

## Exercices

**Lors de la répétition, les exercices I. ex 1 (A - C), II. (C) et III. ex 2 (A - C) seront résolus par l'assistant.**

### I. Déterminants

1. Calculer le plus rapidement possible le déterminant de chacune des matrices suivantes.

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2-i & 3i \\ -1 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ (i+1)^2 & 5 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -6 \end{pmatrix},\ D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Le déterminant de chacune des matrices suivantes est un polynôme en $x \in \mathbb{C}$. Factoriser ce polynôme en un produit de facteurs du premier degré.

$$A = \begin{pmatrix} 1-x & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2-x \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} i & x+2 \\ -x & -i \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} x & -4 \\ 1 & x \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} x & 0 & 3 \\ 0 & x+1 & x \\ 1 & 0 & x-2 \end{pmatrix}.$$

## II. Inversion de matrices

Calculer (si elle existe) la matrice inverse de chacune des matrices suivantes (on donne $\alpha \in \mathbb{R}$).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \\ \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

## III. Valeurs et vecteurs propres, diagonalisation

1. Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes et en donner la multiplicité.

$$A = \begin{pmatrix} i & -i \\ i & i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes. Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Pourquoi ? Si elles le sont, en déterminer une forme diagonale $\Delta$, ainsi qu'une matrice inversible $S$ qui y conduit.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits $AS$ et $S\Delta$. Comparer les matrices obtenues. N'aurait-on pas pu prévoir ce resultat sans effectuer les calculs ? Pourquoi ?

3. Une matrice carrée $A$ de dimension 2 possède les deux valeurs propres 1 et -1, auxquelles peuvent être associés respectivement les vecteurs propres

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Que vaut $A$ ?

# Liste 8 : calcul matriciel (3)

A REVOIR EN FONCTION DE L'AVANCEE DU COURS

---

## A préparer AVANT de venir à la répétition

### I. Matrices de Leslie et matrices stochastiques

Etant donné une matrice carrée A,

1. qu'appelle-t-on matrice de Leslie, matrice de Leslie régulière ? Ne pas considérer cette question si la matière n'a pas été vue au cours
2. qu'appelle-t-on matrice stochastique, matrice stochastique régulière ?
3. qu'appelle-t-on vecteur de probabilité ?

---

## Exercices

**Lors de la répétition, les exercices I. ex 1 et ex 2 ainsi que II. ex 1 et ex 2 seront résolus par l'assistant.**
La liste des exercices de la partie I sera peut-être revue en fonction de l'avancée du cours

### I. Matrices de Leslie et matrices stochastiques

1. Les baleines bleues sont une espèce de mammifère en voie d'extinction à cause notamment de non respect de règles de pêche. Tous les 20 ans, des chercheurs recensent leur population (une estimation bien sûr) et font la répartition entre le nombre de baleines femelles de moins de 20 ans (les ≪ jeunes ≫) et celui des baleines femelles de strictement plus de 20 ans (les ≪ vieilles ≫). Ils ont trouvé le moyen de marquer les deux catégories de telle sorte que l'on puisse reconnaître les jeunes nés d'une mère de moins de 20 ans et ceux nés d'une mère de plus de 20 ans. Le comptage des baleines femelles actuellement donne les résultats suivants : $1/3$ des baleines femelles ≪ jeunes ≫ ont donné naissance à un petit (survivant) et $5/8$ des baleines ≪ vieilles ≫ l'ont fait. De plus, seulement $1/6$ des baleines ≪ jeunes ≫ et seulement la moitié des baleines ≪ vieilles ≫ ont survécu.
   On suppose que les paramètres sont valables à grande échelle de temps...
   (a) Ecrire le système d'équations modélisant l'évolution des deux catégories de baleines, en spécifiant la matrice de Leslie correspondante.
   (b) Comment va évoluer la population ?
   (c) Pourquoi peut-on dire que l'espèce est en voie d'extinction ?
2. L'institut météorologique a fait les observations suivantes :
   — on n'a jamais vu deux jours ensoleillés consécutifs,
   — s'il fait beau un jour donné, on a une chance égale d'avoir de la pluie ou de la neige le lendemain,
   — s'il pleut ou s'il neige, on a une chance sur deux que le temps se maintienne le jour suivant et une chance sur quatre qu'il fasse beau le lendemain.
   Sachant cela,
   (a) Représenter la matrice de transition de ce système.
   (b) Sachant qu'il fait beau aujourd'hui, quel pourcentage de chance a-t-on qu'il fasse beau dans deux jours ?
   (c) A long terme, quelle sera l'évolution du climat ?

3. Dans un laboratoire, à chaque repas, des lapins ont le choix entre manger des carottes, de la salade ou des pissenlits mais ne peuvent manger qu'un aliment d'une seule catégorie lors d'un même repas. Comme ils sont gourmands, ils ne manquent jamais un repas.
   L'observation montre que si un lapin a mangé des carottes à un repas, il en mangera au repas suivant dans 70 % des cas ; sinon, il mangera de la salade une fois sur 5 ou des pissenlits 1 fois sur 10.
   S'il a mangé de la salade, il en mangera encore 6 fois sur 10 au repas suivant ; sinon, il mangera un des deux autres aliments de façon équiprobable.
   Enfin, s'il a mangé des pissenlits, au repas suivant il y a 1 chance sur 5 qu'il mange des carottes et 2 chances sur 5 de la salade.
   (a) Si un lapin vient de manger des carottes, quelle est la probabilité qu'il mange de la salade dans deux repas ?
   (b) A longue échéance, que mange ce lapin ?
4. Un individu vit dans un milieu où il est susceptible d'attrapper une maladie par piqûre d'insecte. Il peut être dans l'un des trois états suivants : immunisé ($I$), malade ($M$), non malade et non immunisé ($S$). D'un mois à l'autre, son état peut changer selon les règles suivantes :
   - étant immunisé, il peut le rester avec une probabilité $0,9$ ou passer à l'état $S$ avec une probabilité $0,1$ ;
   - étant dans l'état $S$, il peut le rester avec une probabilité $0,5$ ou passer à l'état $M$ avec une probabilité $0,1$ ;
   - étant malade, il peut le rester avec une probabilité $0,2$ ou passer à l'état $S$ avec une probabilité $0,8$.

   Déterminer
   (a) la matrice de transition du système ;
   (b) la probabilité qu'un individu immunisé soit encore immunisé après deux mois ;
   (c) la probabilité qu'à long terme, un individu soit immunisé.
5. Un biologiste étudie le passage d'une molécule de phosphore dans un écosystème. Celle-ci peut se trouver dans le sol, dans l'herbe, dans le bétail ou peut disparaître de l'écosystème. D'une heure à l'autre, le transfert peut s'effectuer selon les modalités suivantes :
   - étant dans le sol, la molécule a 3 chances sur 5 d'y rester, 3 chances sur 10 de passer dans l'herbe et 1 chance sur 10 de disparaître ;
   - étant dans l'herbe, elle a 1 chance sur 10 de revenir dans le sol, 2 chances sur 5 de rester dans l'herbe et 1 chance sur 2 de se retrouver dans le bétail ;
   - étant dans le bétail, elle a 3 chances sur 4 de retourner dans le sol, 1 chance sur 5 de rester dans le bétail et 1 chance sur 20 de disparaître ;
   - si la molécule disparaît, elle ne réapparaît plus nulle part.

   Déterminer la matrice de transition du système.
6. Depuis des mois, un laborantin de l'ile de Rêve travaille sur une substance, appelée KillCovid, très prometteuse pour la découverte d'un médicament qui permettrait de détruire le virus responsable de la maladie Covid. Le KillCovid n'a malheureusement qu'une durée de vie de deux mois.
   Le laborantin a trouvé le moyen de se servir de ce KillCovid comme catalyseur pour en produire du nouveau, à partir d'autres substances communes tenues secrètes. Il récupère donc le KillCovid utilisé à la fin du processus. Chaque mois, en utilisant 1 dose de KillCovid d'un mois, il produit 1/2 dose de nouveau KillCovid et la proportion est la même avec le KillCovid de deux mois.
   (a) Ecrire le système d'équations modélisant l'évolution du stock de KillCovid (stock âgé d'un mois et stock âgé de deux mois), en spécifiant la matrice de Leslie correspondante.
   (b) Comment va évoluer le stock de KillCovid ?
7. Par cycle de trois ans, un gestionnaire financier s'occupe du portefeuille d'actions d'une entreprise. Ce portefeuille comprend des actions qui viennent d'être achetées, d'autres qui ont été achetées un an auparavant et enfin d'autres qui sont dans le portefeuille depuis deux ans.
   Le prix de chaque action venant d'être achetée augmente tellement qu'au début de la deuxième année on peut en acheter 6 nouvelles et au début de la troisième 10 nouvelles.
   En même temps, au cours de la première année, il revend la moitié de ses actions pour investir

dans l'entreprise et, au cours de la deuxième année, il ne conserve que 40 % des actions possédées à ce moment et revend les autres pour la même raison.
(a) Ecrire le système d'équations modélisant l'évolution de cette répartition des actions selon leur durée de placement (un an, deux ans, trois ans) en indiquant quelle est la matrice de Leslie de celle-ci.
(b) Comment va évoluer la composition du portefeuille ?
(c) Quelle est la répartition idéale qui permet de doubler chaque nombre d'actions de chaque type sur un an ?

## II. Divers

1. En algèbre linéaire (ou géométrie analytique), une rotation du plan (d'angle $\theta$) est représentée par une matrice du type
$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$
où $\theta$ est un réel (et représente la mesure de l'angle de la rotation).
— Pour tout $\theta$, déterminer la matrice produit $M_\theta^2$ et en simplifier les éléments au maximum.
— Montrer que quels que soient $\theta, \theta'$, les matrices $M_\theta$ et $M_{\theta'}$ commutent. Qu'est-ce que cela signifie en termes de rotations ?
— Montrer que quel que soit le réel $\theta$, la matrice
$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$
est aussi une matrice qui représente une rotation.

2. Vrai ou faux (Justifier)
   (a) Toute matrice carrée de dimension 3 commute avec la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (b) La matrice
$$\begin{pmatrix} a-b & a^2-ab+b^2 \\ a^2-b^2 & a^3-b^3 \end{pmatrix}$$
($a, b \in \mathbb{C}$) est toujours inversible.
   (c) Si une matrice carrée $A$ de dimension 2 est de déterminant nul, alors l'une des colonnes de $A$ est multiple de l'autre.
   (d) Si deux lignes d'une matrice carrée $A$ de dimension 3 sont identiques, alors $\det A = 0$.
   (e) Si $A$ est une matrice carrée de dimension 3, alors $\det(5A) = 5\det(A)$.
   (f) Si $B$ est la matrice obtenue en multipliant la ligne 3 d'une matrice carrée $A$ de dimension 3 par 5, alors $\det(B) = 5\det(A)$.
   (g) Si $X$ est un vecteur propre de la matrice $2A$ alors c'est aussi un vecteur propre de $A$.
   (h) Si $\lambda$ est une valeur propre de $A$ alors $\lambda^2$ est valeur propre de $A^2$.
   (i) 0 peut être valeur propre d'une matrice inversible.
   (j) Si $A$ est inversible, tout vecteur propre de $A$ est aussi vecteur propre de son inverse.
   (k) Le carré d'une matrice est une matrice qui possède au moins un élément non nul.
   (l) Si $A$ est diagonalisable, alors sa transposée l'est aussi.
   (m) Si $A$ est diagonalisable et inversible, alors l'inverse est aussi diagonalisable.
   (n) Si $A$ est diagonalisable, alors $A^2$ l'est aussi.
   (o) Les valeurs propres de l'inverse d'une matrice inversible sont les inverses des valeurs propres de la matrice.

(p) La somme de deux matrices diagonalisables est toujours une matrice diagonalisable.

3. La cryptographie, pour beaucoup de monde, est un moyen de maintenir des communications privées. En effet, la protection des communications sensibles a été l'objectif principal de la cryptographie dans la grande partie de son histoire. Le *chiffrage* est la transformation des données dans une forme illisible. Son but est d'assurer la sécurité en maintenant l'information cachée aux gens à qui l'information n'est pas adressée, même ceux qui peuvent voir les données chiffrées. Le *déchiffrage* est l'inverse du chiffrage ; c'est la transformation des données chiffrées dans une forme intelligible.
Aujourd'hui, les gouvernements emploient des méthodes sophistiquées de codage et de décodage des messages. Un type de code, qui est extrêmement difficile à déchiffrer, se sert d'une grande matrice pour coder un message. Le récepteur du message le décode en employant l'inverse de la matrice. Voici un exemple de codage/décodage d'un message par ce procédé.
Considérons le message

SUIS EN DANGER

ainsi que la matrice de codage

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = C.$$

Pour le codage, on assigne à chaque lettre de l'alphabet un nombre, à savoir simplement sa position dans l'alphabet, c'est-à-dire A correspond à 1, B correspond à 2, ... , Z correspond à 26. En outre, on assigne le nombre 27 à un espace. Ainsi, le message devient :

$$\begin{array}{cccccccccccccc} \text{S} & \text{U} & \text{I} & \text{S} & * & \text{E} & \text{N} & * & \text{D} & \text{A} & \text{N} & \text{G} & \text{E} & \text{R} \\ 19 & 21 & 9 & 19 & 27 & 5 & 14 & 27 & 4 & 1 & 14 & 7 & 5 & 18. \end{array}$$

Puisqu'on emploie une matrice $2 \times 2$, on décompose la forme numérique de ce message en une suite de vecteurs[3] $1 \times 2$ :

$$(19 \quad 21),\ (9 \quad 19),\ (27 \quad 5),\ (14 \quad 27),\ (4 \quad 1),\ (14 \quad 7),\ (5 \quad 18).$$

On code alors le message en multipliant chacun de ces vecteurs par la matrice de codage $C$, ce qui peut être fait en définissant une matrice dont les lignes sont ces vecteurs et en multipliant cette dernière par $C$, ce qui nous donne :

$$\begin{pmatrix} 19 & 21 \\ 9 & 19 \\ 27 & 5 \\ 14 & 27 \\ 4 & 1 \\ 14 & 7 \\ 5 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 25 \\ -10 & 39 \\ 22 & -39 \\ -13 & 53 \\ 3 & -5 \\ 7 & -7 \\ -13 & 44 \end{pmatrix}$$

Dès lors, le message crypté est donné par les lignes de cette dernière matrice que l'on place bout à bout pour la transmission :

$$-2,\ 25,\ -10,\ 39,\ 22,\ -39,\ -13,\ 53,\ 3,\ -5,\ 7,\ -7,\ -13,\ 44.$$

Enfin, pour décoder le message, le récepteur a recours à la même technique que celle employée pour le codage mais en utilisant l'inverse de la matrice de codage, qui est donnée ici par

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il doit donc calculer le produit

3. Dans le cas où il faut compléter le dernier vecteur, il suffit d'y placer des ≪ 27 ≫, ce qui revient à compléter le message par des espaces pour avoir un nombre de caractères qui soit multiple de la dimension de la matrice de codage.

$$\begin{pmatrix} -2 & 25 \\ -10 & 39 \\ 22 & -39 \\ -13 & 53 \\ 3 & -5 \\ 7 & -7 \\ -13 & 44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 21 \\ 9 & 19 \\ 27 & 5 \\ 14 & 27 \\ 4 & 1 \\ 14 & 7 \\ 5 & 18 \end{pmatrix}$$

et il retrouve bien la matrice correspondant au message de départ, ce qui lui permet de lire le message :

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 19 | 21 | 9 | 19 | 27 | 5 | 14 | 27 | 4 | 1 | 14 | 7 | 5 | 18 |
| S | U | I | S | * | E | N | * | D | A | N | G | E | R. |

Le Gouvernement a réussi à intercepter le message crypté suivant, provenant de l'ennemi public n°1 et destiné à l'ennemi public n°2 :

$$-18,\ -21,\ -31,\ 53,\ 48,\ 61,\ 3,\ -15,\ -21,\ -34,\ -30,\ -43,\ 45,\ 42,\ 48.$$

L'un de ses meilleurs espions infiltrés, James Bond, a découvert que la matrice utilisée par l'ennemi pour coder ce message est la suivante :

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Malheureusement, il n'y connaît rien en calcul matriciel et personne ne peut déchiffrer ce message... Votre mission est de décoder ce message dans les plus brefs délais.

# Chapitre 2

# Révisions et compléments

## 2.1 Exercices sur la liste 2 : les approximations polynomiales

Dans cette section figurent quelques exercices de base (dont il a été question durant les années académiques mentionnées).

Dans tout ce qui suit, sauf mention du contraire, $x$ est l'inconnue réelle.

**Liste 2002/2003**

1. Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre $n$ au point $x_0$ pour chacune des fonctions données ci-dessous.

$$f(x) = x\sin(x), n = 3, x_0 = 0, \quad f(x) = \sqrt{1+x}, n = 2, x_0 = 0, \quad f(x) = \ln(x+1), n = 3, x_0 = 0$$
$$f(x) = \ln(x), n = 2, x_0 = 2$$

2. Estimer le reste de l'approximation polynomiale à l'ordre 2 et à l'ordre 3 en 0 de la fonction $f(x) = \sin(x),\ x \in \mathbb{R}$.

**Liste 2003/2004**

1. Déterminer l'approximation polynomiale de $f$ à l'ordre $n$ au point $x_0$ dans chacun des cas suivants.

$$\begin{array}{ll} f_1(x) = x^2\cos(x),\ x_0 = 0, n = 4 & f_2(x) = \tan(x),\ x_0 = \pi, n = 4 \\ f_3(x) = \tan(x),\ x_0 = \pi/4, n = 3 & f_4(x) = \sqrt{2x+1},\ x_0 = 0, n = 2 \\ f_5(x) = \ln(1-x^2),\ x_0 = 0, n = 2 & f_6(x) = x\ \mathrm{arcos}(x),\ x_0 = 0, n = 2 \end{array}$$

2. Estimer le reste de l'approximation polynomiale à l'ordre 2 en 0 de la fonction cos. Représenter la fonction et cette approximation dans le même repère orthonormé.

**Liste 2004/2005**

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre $n$ en $x_0$ pour la fonction donnée explicitement.

$$\begin{array}{ll} f_1(x) = e^{-2x},\ x_0 = 0, n = 0,1,2,3 & f_2(x) = xe^{-2x},\ x_0 = 0, n = 0,1,2,3 \\ f_3(x) = 1/(1+x^2),\ x_0 = 0, n = 0,1,2 & f_4(x) = \arctan(x),\ x_0 = 0, n = 0,1,2,3 \\ f_5(x) = \ln(x),\ x_0 = 1, n = 0,1,2,3 & f_6(x) = (1+x)^3,\ x_0 = 0, n = 0,1,2,3,4 \end{array}$$

Représenter $f_3$ et son approximation à l'ordre 2 en 0.

2. Estimer le reste de l'approximation polynomiale à l'ordre 4 en 0 de la fonction sin. Représenter la fonction et cette approximation dans le même repère orthonormé.

3. — L'approximation à l'ordre 3 d'une fonction en un point est toujours
☐ un polynôme de degré 3
☐ une fraction rationnelle dont le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur
☐ un nombre réel plus petit ou égal à 3
☐ une fonction
☐ aucune des propositions précédentes n'est correcte.

## 2.2 Résolution des exercices de la "liste type 2002/2003"

**Exercice 1**

— La fonction $x \mapsto f(x) = x\sin(x)$ est indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$Df(x) = \sin(x) + x\cos(x),\ D^2f(x) = 2\cos(x) - x\sin(x),\ D^3f(x) = -3\sin(x) - x\cos(x)$$

sur $\mathbb{R}$, donc

$$f(0) = 0, \quad Df(0) = 0, \quad D^2f(0) = 2, \quad D^3f(0) = 0.$$

Dès lors, l'approximation demandée est le polynôme

$$P_3(x) = f(0) + x\ Df(0) + \frac{x^2}{2}\ D^2f(0) + \frac{x^3}{6}\ D^3f(0) = x^2.$$

— La fonction $x \mapsto f(x) = \sqrt{1+x}$ est indéfiniment continûment dérivable sur $]-1, +\infty[$ et on a

$$Df(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}, \quad D^2f(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}$$

sur $]-1, +\infty[$, donc

$$f(0) = 1, \quad Df(0) = \frac{1}{2}, \quad D^2f(0) = -\frac{1}{4}.$$

Dès lors, l'approximation demandée est le polynôme

$$P_2(x) = f(0) + x\ Df(0) + \frac{x^2}{2}\ D^2f(0) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}.$$

— La fonction $x \mapsto f(x) = \ln(x+1)$ est indéfiniment continûment dérivable sur $]-1, +\infty[$ et on a

$$Df(x) = (x+1)^{-1},\ D^2f(x) = -(x+1)^{-2},\ D^3f(x) = 2(x+1)^{-3}$$

sur $]-1, +\infty[$, donc

$$f(0) = 0, \quad Df(0) = 1, \quad D^2f(0) = -1, \quad D^3f(0) = 2.$$

Dès lors, l'approximation demandée est le polynôme

$$P_3(x) = f(0) + x\ Df(0) + \frac{x^2}{2}\ D^2f(0) + \frac{x^3}{6}\ D^3f(0) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

— La fonction $x \mapsto f(x) = \ln(x)$ est indéfiniment continûment dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a

$$Df(x) = x^{-1}, \quad D^2f(x) = -x^{-2}$$

sur $]0, +\infty[$, donc

$$f(2) = \ln(2), \quad Df(2) = \frac{1}{2}, \quad D^2f(2) = -\frac{1}{4}.$$

Dès lors, l'approximation demandée est le polynôme

$$P_2(x-2) = f(2) + (x-2)\ Df(2) + \frac{(x-2)^2}{2}\ D^2f(2) = \ln(2) + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{8}.$$

**Exercice 2**

La fonction $x \mapsto f(x) = \sin(x)$ étant réelle et indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}$, vu le développement limité de Taylor, on sait que le reste de l'approximation polynomiale à l'ordre 2 est $R_2(x) = (x^3/6)D^3 f(u_0),\ x \in \mathbb{R}$ et $u_0$ strictement compris entre 0 et $x$.
Puisque $Df(x) = \cos(x),\ D^2 f(x) = -\sin(x)$ et $D^3 f(x) = -\cos(x)$, on a

$$R_2(x) = -\frac{x^3}{6}\cos(u_0) \qquad \text{et} \qquad |R_2(x)| \leq \frac{|x|^3}{6},\ x \in \mathbb{R}.$$

De même, le reste de l'approximation à l'ordre 3 est $R_3(x) = (x^4/24)\ D^4 f(u_0) = x^4\ \sin(u_0)/24,\ x \in \mathbb{R}$ et $u_0$ strictement compris entre 0 et $x$ puisque $D^4 f(x) = \sin(x)$. Mais comme l'approximation de la fonction sinus à l'ordre 4 est la même que l'approximation à l'ordre 3, en utilisant le développement de Taylor, on obtient

$$R_3(x) = R_4(x) = \frac{x^5}{120} D^5 f(u_0) = \frac{x^5}{120}\cos(u_0) \qquad \text{et} \qquad |R_3(x)| \leq \frac{|x|^5}{120},\ x \in \mathbb{R}.$$

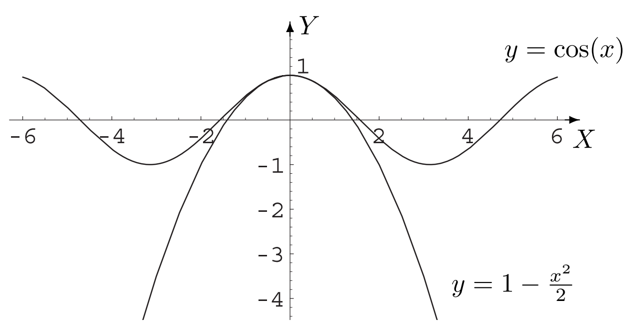
## 2.3 Solutions des exercices de la "liste type 2003/2004"

**Exercice 1**

$f_1 : P_4(x) = x^2 - x^4/2,\ x \in \mathbb{R}$.
$f_2 : P_4(x-\pi) = x - \pi + (x-\pi)^3/3,\ x \in ]\pi/2, 3\pi/2[$.
$f_3 : P_3(x-\pi/4) = 1 + 2(x-\pi/4) + 2(x-\pi/4)^2 + (8/3)(x-\pi/4)^3,\ x \in ]-\pi/2, \pi/2[$.
$f_4 : P_2(x) = 1 + x - x^2/2,\ x \in ]-1/2, +\infty[$.
$f_5 : P_2(x) = -x^2,\ x \in ]-1, 1[$.
$f_6 : P_2(x) = (\pi/2)x - x^2,\ x \in ]-1, 1[$.

**Exercice 2**

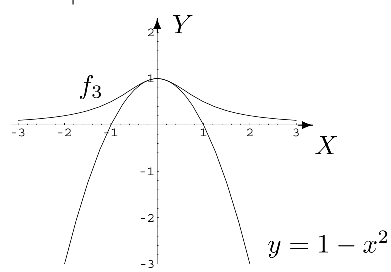
$R_2(x) = (x^3/6)\sin(u)$ avec $u$ strictement compris entre 0 et $x$ ; on a donc $|R_2(x)| \leq x^3/6,\ x \in \mathbb{R}$.



## 2.4 Solutions des exercices de la “liste type 2004/2005”

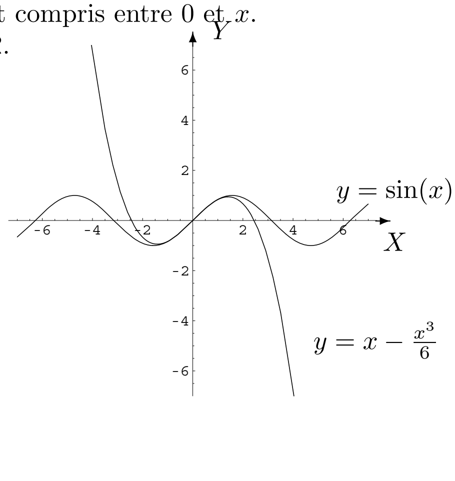
**Exercice 1**

| | $P_0(x-x_0)$ | $P_1(x-x_0)$ | $P_2(x-x_0)$ | $P_3(x-x_0)$ | $P_4(x-x_0)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_1$ | $1$ | $1-2x$ | $1-2x+2x^2$ | $1-2x+2x^2-\dfrac{4}{3}x^3, x\in\mathbb{R}$ | |
| $f_2$ | $0$ | $x$ | $x-2x^2$ | $x-2x^2+2x^3, x\in\mathbb{R}$ | |
| $f_3$ | $1$ | $1$ | $1-x^2, x\in\mathbb{R}$ | | |
| $f_4$ | $0$ | $x$ | $x$ | $x-\dfrac{x^3}{3}, x\in\mathbb{R}$ | |
| $f_5$ | $0$ | $x-1$ | $x-1-\dfrac{(x-1)^2}{2}$ | $x-1-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}, x\in ]0,+\infty[$ | |
| $f_6$ | $1$ | $1+3x$ | $1+3x+3x^2$ | $1+3x+3x^2+x^3$ | $1+3x+3x^2+x^3, x\in\mathbb{R}$ |

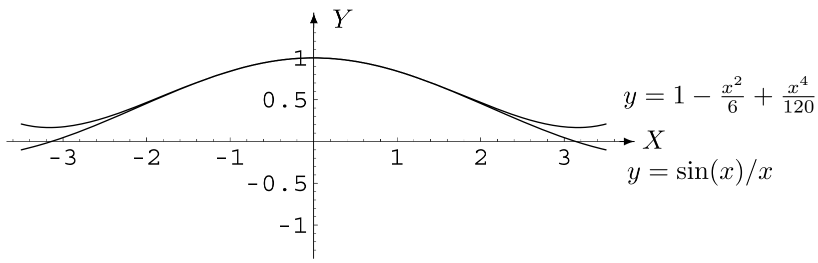



**Exercice 2**

$R_4(x)=\cos(u_0)x^5/5!$ avec $u_0$ strictement compris entre 0 et $x$.
Approximation : $P_4(x)=x-x^3/6, x\in\mathbb{R}$.




$R_4(x)=(x^5/5\,!)(u_0^5\cos(u_0)-5\,u_0^4\sin(u_0)-20\,u_0^3\cos(u_0)+60\,u_0^2\sin(u_0)+120\,u_0\cos(u_0)-120\,\sin(u_0))\;.\;u_0^{-6}$
avec $u_0$ strictement compris entre 0 et $x$.
Approximation : $P_4(x)=1-x^2/6+x^4/120, x\in\mathbb{R}$.




**Exercice 3**
une fonction.

## 2.5 Exercices sur les listes 3 et 4 : le calcul intégral à une variable

Dans cette section figurent quelques exercices de base (dont il a été question durant les années académiques mentionnées).

**Liste 2002-2003**

1. Calculer les intégrales suivantes

$$\int_1^2 \sqrt{x}\ dx \qquad \int_0^1 xe^{-x}\ dx \qquad \int_0^{2\pi} \sin^2(y)\ dy$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx \qquad \int_0^1 \ln(t)\ dt \qquad \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \qquad \int_0^{+\infty} x^2 e^{-2x}\ dx \qquad \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-1} dx$$

2. Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par les graphiques des fonctions $f, g, h$ données explicitement par $f(x) = x^2$, $\quad g(x) = x$, $\quad h(x) = 2x$ et donner une représentation graphique de cette région du plan.

**Liste 2003-2004**

1. Pour chacun des cas suivants, déterminer si l'intégrale de $f$ sur $A$ existe (c'est-à-dire si $\int_A f(x)\ dx$ représente bien un nombre)

$$f(x) = \sin(\sqrt{x}),\ A = [0,1] \qquad f(x) = \frac{x}{1+x^2},\ A = ]-\infty, 0] \qquad \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$$

$$\int_0^1 \ln(x^2)\ dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx \qquad \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x^2}$$

2. Calculer les intégrales suivantes (si c'est possible)

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2(x)} dx \qquad \int_{1/2}^3 \sqrt{1+x}\ dx \qquad \int_{-1}^2 x^2 e^{-x} dx \qquad \int_0^\pi x\cos^2(x)\ dx$$

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^3}\ dx \qquad \int_0^1 \ln(x^2)\ dx \qquad \int_{-1}^0 \arcsin(x)\ dx \qquad \int_{-1}^0 x\arcsin(x)\ dx$$

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right)\ dx \qquad \int_{-2}^4 \frac{x+4}{x+3} dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{4x^2+9} dx \qquad \int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{4x^2-9} dx$$

3. Calculer l'aire de la partie du plan dont une description analytique est la suivante
$$\{(x,y) : x \in [0, 2\pi],\ \cos(x) \leq y \leq \sin(x)\}.$$
Donner aussi une représentation graphique de cet ensemble.
4. La vitesse d'une voiture, partant de l'origine $O$ et se déplaçant en ligne droite suivant l'axe $X$ est $v(t) = 10t - t^2,\ t \in [0, 10]$. Déterminer la position $x(t)$ de la voiture au temps $t \in [0, 10]$. Déterminer également quand l'accélération est nulle.

**Liste 2004/2005**

1. a) Pour chacun des cas suivants, déterminer si $f$ est intégrable sur $A$.
$$f(x) = \cos(\sqrt{|x|}),\ A = [-1, 1];\ f(x) = \frac{x^2}{1+x^4},\ A = \mathbb{R};\ f(x) = \frac{1}{x^3},\ A = ]0, 1] \text{ et } A = [1, +\infty[.$$
b) Calculer les intégrales suivantes (si c'est possible)
$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos^2(x)\ dx \qquad \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{\cos^2(x)}\ dx \qquad \int_{1/2}^{3} \sqrt{3-x}\ dx \qquad \int_{-1}^{1} xe^{-x}\ dx \qquad \int_{0}^{\pi} x\cos(x)\ dx$$
$$\int_{-1}^{1} \ln(x^2)\ dx \qquad \int_{-2}^{4} \frac{x+4}{x+3}\ dx \qquad \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{4x^2+9}\ dx \qquad \int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{4x^2-9}\ dx \qquad \int_{0}^{1} \frac{x}{1+x^2}\ dx$$
2. Calculer l'aire de la partie du plan dont une description analytique est la suivante
$$\left\{(x,y) : x \in [-1, 1], y \in \mathbb{R} \text{ et } \sin^2\left(\frac{\pi x}{4}\right) \leq y \leq \cos^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right\}.$$
Donner aussi une représentation graphique de cet ensemble.
3. Calculer (si possible)
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+1}dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+x-2}dx \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2+x-2}dx$$
4. La vitesse à laquelle s'accroît une population de virus est donnée au cours du temps par la fonction $\exp(3t),\ t \geq 0$.
a) Avec ces données, est-il possible de déterminer la population au temps 0 ? Pourquoi ?
Si la réponse est "oui", déterminer cette population.
b) Sachant qu'au départ la population était égale à 1 (million d'individus), déterminer la population au temps $t = 1$.
5. A proposer aux étudiants
   (a) Si la somme de deux fonctions $f, g$ est intégrable sur $[0, 1]$ alors l'intégrale de la somme $f + g$ est égale à la somme des intégrales de $f$ et $g$. Vrai □ Faux □
   (b) Si $f, g$ sont deux fonctions continues et intégrables sur $[0, +\infty[$ alors
   1) toute combinaison linéaire de $f$ et $g$ est aussi intégrable sur$[0, +\infty[$
   2) l'intégrale d'une combinaison linéaire de $f$ et $g$ est égale à la combinaison linéaire des intégrales.
   Exprimer mathématiquement la partie 2) du résultat énoncé ci-dessus.
   (c) Une fonction continue sur $[0, 2[$ est toujours intégrable sur $[0, 2[$ Vrai □ Faux □
   (d) Une fonction continue sur $[0, 2[$ est toujours intégrable sur $[0, 1]$ Vrai □ Faux □
   (e) Qu'appelle-t-on largeur d'un découpage ?
   (f) On donne le découpage suivant de l'intervalle $[0, 1]$ :
   $$0, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1.$$
   Que vaut la largeur de ce découpage ?
   (g) Si on augmente le nombre de points d'un découpage, on diminue toujours sa largeur.
   Vrai □ Faux □

## 2.6 Résolution des exercices de la “liste type 2002/2003”

**Exercice 1**

— Comme $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est une fonction continue sur $[1,2]$, ensemble borné et fermé, elle y est intégrable et on a

$$\int_1^2 \sqrt{x}\ dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_1^2 = \frac{2}{3}(\sqrt{8}-\sqrt{1}) = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

— Comme $f : x \mapsto x\ e^{-x}$ est une fonction continue sur $[0,1]$, ensemble borné et fermé, elle y est intégrable et on a

$$\int_0^1 x\ e^{-x}\ dx = \int_0^1 xD(-e^{-x})\ dx = [-x\ e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\ dx = -e^{-1} - [e^{-x}]_0^1 = -2e^{-1}+1 = 1-\frac{2}{e}.$$

— Comme $f : y \mapsto \sin^2(y) = (1-\cos(2y))/2$ est une fonction continue sur $[0,2\pi]$, ensemble borné et fermé, elle y est intégrable et on a

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(y)\ dy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1\ dy - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(2y)\ dy = \frac{1}{2}[y]_0^{2\pi} - \frac{1}{4}[\sin(2y)]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\ .\ 2\pi = \pi.$$

— Comme $f : x \mapsto 1/\sqrt{x}$ est une fonction continue sur $]0,1]$, ensemble borné non fermé, on doit étudier l'intégrabilité en 0. Puisque $1/\sqrt{x} = 1/x^{1/2}$, $s = 1/2$ étant strictement inférieur à 1, la fonction est intégrable en 0, donc sur $]0,1]$ et on a

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}\ dx = [2\sqrt{x}]_0^1 = 2.$$

— Comme $f : t \mapsto \ln(t)$ est une fonction continue sur $]0,1]$, ensemble borné non fermé, on doit étudier l'intégrabilité en 0. Considérons $\lim\limits_{t\to 0^+}(t^{\frac{1}{2}}\ln(t))$ et levons l'indétermination “$0\ .\ \infty$” par application du théorème de l'Hospital.
Soit $V = ]0,\varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit. Les fonctions $t \mapsto \ln(t)$ et $t \mapsto t^{-1/2}$ sont dérivables dans $V$ et $Dt^{-1/2} = (-1/2)t^{-3/2} \neq 0\ \forall t \in V$. De plus, on a

$$\lim_{t\to 0^+}(t^{1/2}\ln(t)) = \lim_{t\to 0^+}\frac{\ln(t)}{t^{-1/2}} = \lim_{t\to 0^+}\frac{D(\ln(t))}{D(t^{-1/2})} = \lim_{t\to 0^+}\frac{t^{-1}}{(-1/2)t^{-3/2}} = -2\lim_{t\to 0^+} t^{1/2} = 0.$$

Dès lors, $\lim\limits_{t\to 0^+}(t^{1/2}\ln(t)) = 0$ et puisque cette limite existe et est finie, le critère d'intégration en $\theta$ (avec $\theta = 1/2 < 1$) permet d'affirmer que la fonction est intégrable en 0 et donc sur $]0,1]$. Ainsi,

$$\int_0^1 \ln(t)\ dt = \int_0^1 D(t)\ .\ \ln(t)\ dt = [t\ \ln(t)]_0^1 - \int_0^1 t\ .\ \frac{1}{t}\ dt = -[t]_0^1 = -1.$$

**Autre méthode** : la fonction $f$ étant continue et négative sur l'intervalle d'intégration, on peut vérifier son intégrabilité en 0 et calculer la valeur de son intégrale par application de la définition. Si la limite $\lim\limits_{x\to 0^+}\int_x^1 \ln(t)\,dt$ est finie alors $f$ est intégrable en 0 donc sur $]0,1]$ et la valeur de cette limite est aussi la valeur de l'intégrale.
Comme

$$F(x) = \int_x^1 \ln(t)\,dt = [t\ln(t)-t]_x^1 = -1 - x\ln(x) + x$$

et

$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = -1 - \lim_{x\to 0^+}(x\ln(x)) = -1 - \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{x^{-1}},$$

on lève l'indétermination "$\frac{\infty}{\infty}$" par application du théorème de l'Hospital (les hypothèses étant vérifiées). Ainsi, puisque

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{D\ln(x)}{D(x^{-1})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0,$$

$f$ est intégrable sur $]0,1]$ et son intégrale vaut $-1$.

— Comme $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est une fonction continue sur $[0,1]$, ensemble borné et fermé, elle y est intégrable. Si on effectue le changement de variables $g : t \mapsto x = \sin(t)$ entre $]0,\pi/2[$ et $]0,1[$, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(t)}\ \cos(t)\ dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2(t)}\ \cos(t)\ dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\ dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2}\ dt \\
&= \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

puisque $\cos(t) \geq 0$ si $t \in [0,\pi/2]$.

— Comme $f : x \mapsto 1/(1+x^2)$ est une fonction paire continue sur $\mathbb{R}$, ensemble non borné, il suffit de vérifier l'intégrabilité en $+\infty$. Pour cela, calculons $\lim_{x\to+\infty} \left(x^2\ .\ 1/(1+x^2)\right)$. Cette limite existe et est finie puisqu'elle vaut 1. Dès lors, par le critère d'intégration en $\theta$ avec $\theta = 2 > 1$, cela prouve que $f$ est intégrable en $+\infty$. Ainsi,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\ dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\ dx = 2[\arctan(x)]_0^{+\infty} = 2\,(\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) - \arctan(0)) = 2\ .\ \frac{\pi}{2} = \pi.$$

— Comme $f : x \mapsto x^2\ e^{-2x}$ est une fonction continue sur $[0,+\infty[$, ensemble non borné, on doit étudier l'intégrabilité en $+\infty$. Considérons $\lim_{x\to+\infty} (x^2\ .\ x^2 e^{-2x}) = \lim_{x\to+\infty} (x^4\ .\ e^{-2x})$ ; cette limite vaut 0 car "à l'infini, la fonction exponentielle domine toute puissance antagoniste de $x$". Puisque cette limite existe et est finie, le critère d'intégration en $\theta$ (avec $\theta = 2 > 1$) permet d'affirmer que la fonction est intégrable en $+\infty$ et donc finalement sur $[0,+\infty[$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} x^2\ e^{-2x}\ dx &= \int_0^{+\infty} x^2\ D\left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right)\ dx \\
&= \left[-\frac{x^2\ e^{-2x}}{2}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x\ e^{-2x}\ dx \\
&= 0 + \int_0^{+\infty} x\ D\left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right)\ dx \\
&= \left[-\frac{x\ e^{-2x}}{2}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-2x}\ dx \\
&= 0 - \frac{1}{4}\left[e^{-2x}\right]_0^{+\infty} \\
&= -\frac{1}{4}\ (\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} - 1) \\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

— Comme $f : x \mapsto 1/(x^2-1)$ est une fonction continue sur $[2,+\infty[$, ensemble non borné, on doit étudier l'intégrabilité en $+\infty$. Considérons $\lim_{x\to+\infty} \left(x^2 \,.\, 1/(x^2-1)\right)$. Cette limite existe et est finie puisqu'elle vaut 1, ce qui prouve, par le critère d'intégration en $\theta$ avec $\theta = 2 > 1$, que $f$ est intégrable en $+\infty$ donc finalement sur $[2,+\infty[$. Calculons tout d'abord une primitive de $f$ en décomposant cette fonction en une somme de fractions simples. On a, pour tout $x \neq \pm 1$,

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)},$$

ce qui donne

$$(A+B)x + (A-B) = 1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A+B=0 \\ A-B=1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A=1/2 \\ B=-1/2 \end{array} \right.$$

et donc, si $x \geq 2$

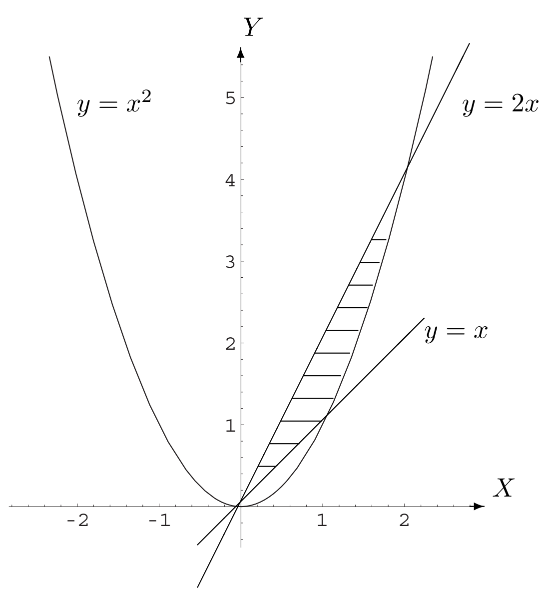
$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx \simeq \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x+1) \simeq \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right).$$

Ainsi,

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\left[\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - \ln\left(\frac{2-1}{2+1}\right)\right] = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\ln(3).$$

**Exercice 2**

Représentons graphiquement la région dont on veut calculer l'aire.




Si $f(x) = x^2$, $g(x) = x$ et $h(x) = 2x$, d'une part, les points d'intersection des graphiques de $f$ et $g$ ont pour coordonnées $(0,0)$ et $(1,1)$ ; d'autre part, les points d'intersection des graphiques de $f$ et $h$ ont pour coordonnées $(0,0)$ et $(2,4)$. Ainsi, puisque les fonctions à intégrer sont continues sur tout intervalle fermé et borné, on a

$$\begin{aligned}
\text{Aire} &= \int_0^1 (2x - x)\ dx + \int_1^2 (2x - x^2)\ dx \\
&= \int_0^1 x\ dx + \int_1^2 (2x - x^2)\ dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 \\
&= \frac{1}{2} + \left[(4 - \frac{8}{3}) - (1 - \frac{1}{3})\right] \\
&= \frac{1}{2} + 3 - \frac{7}{3} \\
&= \frac{3 + 18 - 14}{6} \\
&= \frac{7}{6}.
\end{aligned}$$

## 2.7 Solutions des exercices de la "liste type 2003/2004"

**Exercice 1**

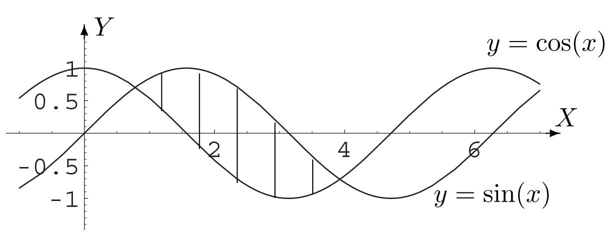
$f(x) = \sin(\sqrt{x})$ : intégrable sur $A$.
$f(x) = x/(1 + x^2)$ : non intégrable en $-\infty$ donc non intégrable sur $A$.
$f(x) = 1/x^2$ : non intégrable en 0 donc non intégrable sur$[-1, 1]$.
$f(x) = \ln(x^2)$ : intégrable sur $]0, 1]$.
$f(x) = \ln(x)/(1 + x^2)$ : intégrable sur $]0, +\infty[$.
$f(x) = \ln(x)/(1 - x^2)$ : intégrable sur $]0, 1[$.

**Exercice 2**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $1$ | $16/3 - \sqrt{6}/2$ | $-10e^{-2} + e$ | $\pi^2/4$ |
| $1/3$ | $-2$ | $1 - \frac{\pi}{2}$ | $\pi/8$ |
| non intégrable en $+\infty$ | $6 + \ln(7)$ | $\pi/12$ | $\ln(7)/12$ |

**Exercice 3**

Aire $= 2\sqrt{2}$.




**Exercice 4**

$x(t) = 5t^2 - t^3/3,\ t \in [0, 10]$.

Accélération nulle si $t = 5$.

## 2.8 Solutions des exercices de la “liste type 2004/2005”

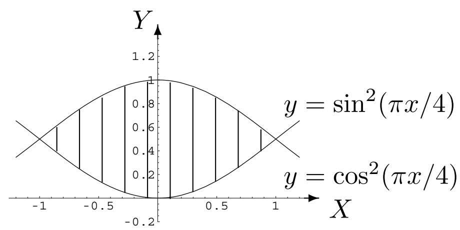
**Exercice 1**

Les deux premières fonctions sont intégrables sur $A$, la troisième est intégrable sur $[1, +\infty[$ mais non sur $]0, 1]$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)$ | $\sqrt{3}-1$ | $\frac{5}{6}\sqrt{10}$ | $\frac{-2}{e}$ | $-2$ |
| $-4$ | $6+\ln(7)$ | $\frac{\pi}{12}$ | $\ln(7)/12$ | $\ln(2)/2$ |

**Exercice 2**

L’aire hachurée vaut $4/\pi$.




**Exercice 3**

La première intégrale vaut $2\sqrt{3}\pi/9$ et la troisième $\ln(4)/3$.
La deuxième fonction n’est pas intégrable en 1.

**Exercice 4**

a) Non, la population est définie à une constante additive près.
b) $P(1) = e^3/3 + 2/3$.

**Exercice 5**

(a) Faux, (b) 1) vrai 2) $\forall r, s \in \mathbb{R} : \int_0^{+\infty}(rf(x) + sg(x))dx = r\int_0^{+\infty} f(x)\ dx + s\int_0^{+\infty} g(x)\ dx$, (c) faux, (d) vrai,(e) cf. notes de cours, (f) la largeur de ce découpage vaut 1/2, (g) faux.

## 2.9 Exercices sur la liste 4 : les nombres complexes

Dans cette section figurent quelques exercices de base (dont il a été question durant les années académiques mentionnées).

Dans tout ce qui suit, sauf mention du contraire, $x$ est l’inconnue réelle.

**Liste 2002/2003**

1. Déterminer les parties réelle et imaginaire, le module et le conjugué de chacun des complexes suivants.
$$i, \quad \frac{1}{i}, \quad i(-i+3), \quad \frac{2i+1}{2i-1}, \quad \frac{2i+1}{-2i+1}.$$

2. a) Déterminer la forme trigonométrique des complexes suivants :

$$i, \quad 1+i, \quad \frac{1}{i}.$$

b) Déterminer les racines quatrièmes du complexe $-1$. Représenter ces racines.

**Liste 2003/2004**

1. Déterminer les parties réelle et imaginaire, le module et le conjugué de chacun des complexes suivants.

$$i, \quad \frac{1}{i}, \quad i(-i+3), \quad \frac{2i+1}{2i-1}, \quad \frac{2i+1}{-2i+1}, \quad i^3, \quad \frac{1}{i^4}, \quad \frac{1}{-i+1}, \quad \frac{-3i+1}{i-1}$$

2. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$ :

$$2iz+3=0, \quad z^2+4=0, \quad z^2+z+1=0.$$

3. Déterminer les racines cubiques du complexe $-2$ et en donner la représentation géométrique.
4. Déterminer les racines cubiques du complexe $1+i$ et du complexe $-i$. En donner une représentation géométrique.
5. QCM
   (a) Le carré d'un nombre complexe est toujours un nombre positif □ un nombre négatif □ un nombre imaginaire pur □ aucune réponse correcte □
   (b) La partie réelle du produit de deux nombres complexes est toujours égale
   au produit des parties réelles de ces nombres □
   à la somme des parties réelles de ces nombres □
   à la somme de la partie réelle de l'un et de la partie imaginaire de l'autre □
   au produit de la partie réelle de l'un et de la partie imaginaire de l'autre □
   aucune réponse correcte□
   (c) Le conjugué du complexe $i/(i+1)$ est $-i/(i+1)$ □ $i/(-i+1)$ □ $-i/(-i+1)$ □ aucune réponse correcte □

**Liste 2004/2005**

1. Déterminer les parties réelle et imaginaire, le module et le conjugué de chacun des complexes suivants.

$$i+1, \quad (1+i)^2, \quad (2i+1)(-i+3), \quad \frac{2i+1}{i+1}$$

2. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$ et en représenter les solutions :

$$iz^2+1=0, \quad 4z^2+1=0, \quad z^2-z+1=0.$$

3. Déterminer les racines cubiques du complexe $i$ et en donner la représentation géométrique.
4. Déterminer les racines quatrièmes du complexe $-16$. En donner une représentation géométrique.
   Déterminer les racines carrées et les racines quatrièmes du complexe $(i\sqrt{3}-1)/2$. En donner la représentation géométrique.

## 2.10 Résolution des exercices de la "liste type 2002/2003"

**Exercice 1**

Rappelons tout d'abord que si $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ alors sa partie réelle, notée $\Re z$, est $a$, sa partie imaginaire, notée $\Im z$, est $b$, son module, noté $|z|$, est $\sqrt{a^2+b^2}$ et son conjugué, noté $\overline{z}$, est $a - ib$. Rappelons aussi que $z.\overline{z} = |z|^2$.

Ecrivons les différentes expressions données sous la forme $a + ib$ ; on a
1) $i = 0 + 1i$
2) $1/i = -i$ si on multiplie numérateur et dénominateur par $-i$, conjugué de $i$
3) $i(-i+3) = -i^2 + 3i = 1 + 3i$ puisque $i^2 = -1$
4) $\dfrac{2i+1}{2i-1} = \dfrac{(1+2i)(-1-2i)}{(-1)^2+2^2} = \dfrac{-1-4i-4i^2}{5} = \dfrac{-1+4-4i}{5} = \dfrac{3-4i}{5}$ si on multiplie numérateur et dénominateur par $-1-2i$, conjugué de $-1+2i$
5) $\dfrac{2i+1}{-2i+1} = \dfrac{(1+2i)(1+2i)}{1^2+(-2)^2} = \dfrac{1+4i+4i^2}{5} = \dfrac{1-4+4i}{5} = \dfrac{-3+4i}{5}$ (même démarche que ci-dessus).
Ainsi,

| $z$ | $\Re z$ | $\Im z$ | $\lvert z\rvert$ | $\overline{z}$ |
|---|---|---|---|---|
| $i$ | $0$ | $1$ | $1$ | $-i$ |
| $1/i$ | $0$ | $-1$ | $1$ | $i$ |
| $i(-i+3)$ | $1$ | $3$ | $\sqrt{10}$ | $1-3i$ |
| $\dfrac{2i+1}{2i-1}$ | $3/5$ | $-4/5$ | $1$ | $(3+4i)/5$ |
| $\dfrac{2i+1}{-2i+1}$ | $-3/5$ | $4/5$ | $1$ | $(-3-4i)/5$ |

**Exercice 2**

a) Forme trigonométrique d'un nombre complexe

— La forme trigonométrique de $i$ est $e^{i\pi/2}$ car $i = 0 + i\,.\,1$ et donc $r = \sqrt{0^2+1^2} = 1$. De plus, comme $\cos(\theta) = 0$ et $\sin(\theta) = 1$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$, on a $\theta = \pi/2$.

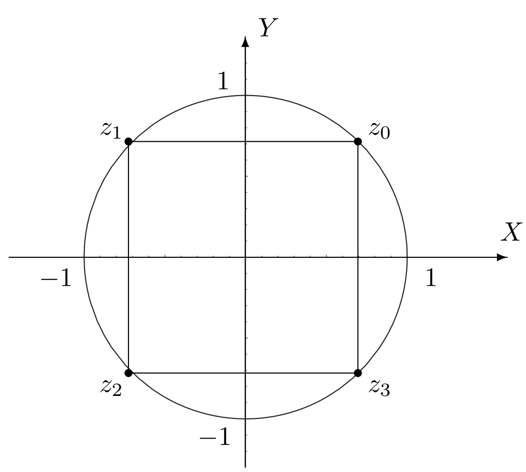
— Considérons $z = 1 + i$ ; on a $|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ et, dès lors, $z = \sqrt{2}\left(\sqrt{2}/2 + i\,\sqrt{2}/2\right)$. Ainsi, $\cos(\theta) = \sin(\theta) = \sqrt{2}/2$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$, ce qui donne $\theta = \pi/4$. Pour conclure, la forme trigonométrique de $1 + i$ est donc $\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$.

— Le complexe $1/i = -i$ s'écrit sous forme trigonométrique $e^{i(3\pi/2)}$ puisque $r = \sqrt{0^2+(-1)^2} = 1$, $\cos(\theta) = 0$ et $\sin(\theta) = -1$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$.

b) La forme trigonométrique de $-1$ est $e^{i\pi}$. Ainsi, ses racines quatrièmes sont données par $z_k = e^{i(\pi+2k\pi)/4}$ avec $k = 0, 1, 2, 3$. Dès lors, on a

$$z_0 = e^{i(\pi/4)},\ z_1 = e^{i(3\pi/4)},\ z_2 = e^{i(5\pi/4)} \text{ et } z_3 = e^{i(7\pi/4)}.$$

Ces racines quatrièmes se représentent sur le cercle centré à l'origine de rayon 1 et sont les sommets d'un carré, points communs au cercle et aux droites d'équation $y = x$ et $y = -x$.



## 2.11 Solutions des exercices de la “liste type 2003/2004”

**Exercice 1**

| $z$ | $\Re z$ | $\Im z$ | $\lvert z\rvert$ | $\overline{z}$ |
|---|---|---|---|---|
| $i$ | $0$ | $1$ | $1$ | $-i$ |
| $\frac{1}{i}$ | $0$ | $-1$ | $1$ | $i$ |
| $i(-i+3)$ | $1$ | $3$ | $\sqrt{10}$ | $1-3i$ |

| $z$ | $\Re z$ | $\Im z$ | $\lvert z\rvert$ | $\overline{z}$ |
|---|---|---|---|---|
| $(2i+1)/(2i-1)$ | $3/5$ | $-4/5$ | $1$ | $(3+4i)/5$ |
| $(2i+1)/(-2i+1)$ | $-3/5$ | $4/5$ | $1$ | $(-3-4i)/5$ |
| $i^3$ | $0$ | $-1$ | $1$ | $i$ |

| $z$ | $\Re z$ | $\Im z$ | $\lvert z\rvert$ | $\overline{z}$ |
|---|---|---|---|---|
| $1/i^4$ | $1$ | $0$ | $1$ | $1$ |
| $1/(-i+1)$ | $1/2$ | $1/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $(1-i)/2$ |
| $(-3i+1)/(i-1)$ | $-2$ | $1$ | $\sqrt{5}$ | $-2-i$ |

**Exercice 2**

$S=\{3i/2\}$ $\qquad$ $S=\{-2i,2i\}$ $\qquad$ $S=\{(-1-i\sqrt{3})/2,(-1+i\sqrt{3})/2\}$

**Exercice 3**

$z_0=\sqrt[3]{2}\ e^{i(\pi/3)}$, $\qquad z_1=\sqrt[3]{2}\ e^{i\pi}$, $\qquad z_2=\sqrt[3]{2}\ e^{i(5\pi/3)}$.
Représentation : sommets du triangle équilatéral inscrit dans le cercle centré à l’origine et de rayon $\sqrt[3]{2}$. Un des sommets appartient à l’axe des $X$, son abscisse étant négative.

**Exercice 4**

Pour $1+i$ : $z_0=\sqrt[6]{2}\ e^{i(\pi/12)}$, $\qquad z_1=\sqrt[6]{2}\ e^{i(3\pi/4)}$, $\qquad z_2=\sqrt[6]{2}\ e^{i(17\pi/12)}$.
Représentation : sommets du triangle équilatéral inscrit dans le cercle centré à l’origine et de rayon $\sqrt[6]{2}$. Un des sommets appartient à la deuxième bissectrice et est situe dans le second quadrant.

Pour $-i$ : $z_0=e^{i(\pi/2)}$, $\qquad z_1=e^{i(7\pi/6)}$, $\qquad z_2=e^{i(11\pi/6)}$.
Représentation : sommets du triangle équilatéral inscrit dans le cercle centré à l’origine et de rayon 1. Un des sommets appartient à l’axe des $Y$, son ordonnée étant positive.

**Exercice 5 : QCM**

(a) aucune réponse correcte
(b) aucune réponse correcte
(c) $-i/(-i+1)$

## 2.12 Solutions des exercices de la "liste type 2004/2005"

**Exercice 1**

| $z$ | $\Re z$ | $\Im z$ | $\lvert z\rvert$ | $\overline{z}$ |
|---|---|---|---|---|
| $i+1$ | 1 | 1 | $\sqrt{2}$ | $1-i$ |
| $(1+i)^2$ | 0 | 2 | 2 | $-2i$ |
| $(2i+1)(-i+3)$ | 5 | 5 | $5\sqrt{2}$ | $5-5i$ |
| $(2i+1)/(i+1)$ | $3/2$ | $1/2$ | $\sqrt{10}/2$ | $(3-i)/2$ |

**Exercice 2**

$S=\left\{-\sqrt{2}(1+i)/2, \sqrt{2}(1+i)/2\right\}$ $\qquad S=\{-i/2, i/2\}$ $\qquad S=\left\{(1-i\sqrt{3})/2, (1+i\sqrt{3})/2\right\}$

**Exercice 3**

Les racines cubiques de $i$ sont $z_0=e^{i(\pi/6)}, z_1=e^{i(5\pi/6)}, z_2=e^{i(3\pi/2)}$. Ce sont les sommets du triangle équilatéral inscrit dans le cercle trigonométrique dont le sommet correspondant à $z_2$ est le point de coordonnées $(0,-1)$.

**Exercice 4**

Les racines quatrièmes de $-16$ sont $z_0=2e^{i(\pi/4)}, z_1=2e^{i(3\pi/4)}, z_2=2e^{i(5\pi/4)}, z_3=2e^{i(7\pi/4)}$. Ce sont les sommets du carré inscrit dans le cercle centré à l'origine et de rayon 2, $z_0$ correspondant au point de coordonnées $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
Les racines carrées de $(i\sqrt{3}-1)/2$ sont $z_0=e^{i(\pi/3)}, z_1=e^{i(4\pi/3)}$. Ce sont les points diamétralement opposés du cercle trigonométrique dont l'un a pour coordonnées $(1/2, \sqrt{3}/2)$.
Les racines quatrièmes de $(i\sqrt{3}-1)/2$ sont $z_0=e^{i(\pi/6)}, z_1=e^{i(2\pi/3)}, z_2=e^{i(7\pi/6)}, z_3=e^{i(5\pi/3)}$. Ce sont les sommets du carré inscrit dans le cercle trigonométrique, $z_0$ correspondant au point de coordonnées $(\sqrt{3}/2, 1/2)$.

## 2.13 Exercices sur les listes 5 et 6 : les équations différentielles

Dans cette section figurent quelques exercices de base (dont il a été question durant les années académiques mentionnées).

**Liste 2002-2003**

1. Résoudre les équations suivantes

$$\begin{array}{ll} 1)\ iDf(x)+3f(x)=2x+i & 2)\ Df(x)=\cos(x)+2f(x) \\ 3)\ 2Df(x)+4f(x)=e^{-2x} & 4)\ D^2f(x)+Df(x)=xe^x \\ 5)\ D^2f(x)+2Df(x)+f(x)=1+\sin(x) & 6)\ D^2f(x)+4f(x)=\cos(2x) \end{array}$$

   Dans le cas 1), quelle est la solution qui s'annule en 1 ?
   Dans le cas 4), quelle est la solution qui vaut 1 en 1 et dont la dérivée s'annule en 1 ?
   Dans le cas 6), quelle est la solution qui s'annule en 0, ainsi que sa dérivée ?

**Liste 2003-2004**

1. Soit $r > 0$. Représenter graphiquement la fonction $y(x) = \sqrt{r^2 - x^2},\ x \in [-r, r]$ et montrer qu'elle vérifie l'équation différentielle
$$yD_x y + x = 0,\ x \in ]-r, r[.$$
2. Résoudre les équations différentielles ou les systèmes suivants, en spécifiant sur quel intervalle on se place

$$a)\ \left\{\begin{array}{l} iDf(x) + 2f(x) = 3i \\ f(1) = i \end{array}\right. \qquad b)\ Df(x) + f(x) = 1/(1 + e^{2x})$$

$$c)\ \left\{\begin{array}{l} D^2f(x) + 9Df(x) = x \\ f(1) = 1 \\ Df(1) = 0 \end{array}\right. \qquad d)\ \left\{\begin{array}{l} D^2f(x) + 9f(x) = x \\ f(0) = 0 \\ Df(0) = 0 \end{array}\right.$$

$$e)\ 9D^2f(x) + 6Df(x) + f(x) = 1 + xe^x \qquad f)\ 9D^2f(x) + 6Df(x) + f(x) = e^{-x/3}$$

$$g)\ iD^2f(x) - f(x) = e^x \qquad h)\ D^2f(x) + 4f(x) = \cos(x)$$

$$i)\ D^2f(x) + 4f(x) = \cos^2(x)$$

**Liste 2004-2005**

1. A proposer aux étudiants.
   — L'équation différentielle $(D_t y)^2 = 4(y + 1)$ est -elle linéaire ?
   Montrer que la fonction $g(t) = t^2 - 2t,\ (t \in \mathbb{R})$ vérifie le système
$$\left\{\begin{array}{l} (D_t y)^2 = 4(y + 1) \\ y(0) = 0 \\ y(2) = 0 \end{array}\right.$$
   — Dans l'étude des solutions des équations différentielles linéaires à coefficients constants, on a rencontré des fonctions fondamentales que l'on a appelées fonctions du type "exponentielle polynôme". Comment s'écrit explicitement une telle fonction ?
2. Résoudre les équations différentielles ou les systèmes suivants, en spécifiant sur quel intervalle on se place

$$a)\ \left\{\begin{array}{l} i^3Df(x) + 2f(x) = 3i \\ f(1) = i^2 \end{array}\right. \qquad b)\ \left\{\begin{array}{l} 4D^2f(x) + Df(x) = x \\ f(1) = 1 \\ Df(1) = 0 \end{array}\right.$$

$$c)\ \left\{\begin{array}{l} 4D^2f(x) + f(x) = x \\ f(0) = 0 \\ Df(0) = 0 \end{array}\right. \qquad d)\ D^2f(x) + Df(x) - 2f(x) = xe^x + e^{2x}$$

$$e)\ 4D^2f(x) + f(x) = 1 + \sin(x) + \sin^2(x) \qquad f)\ D^2f(x) + 4Df(x) + 4f(x) = 1 + e^{-2x}$$

## 2.14 Résolution des exercices de la "liste type 2002/2003"

**Exercice 1**

1. Résolvons l'équation d'ordre 1 homogène $iDf(x) + 3f(x) = 0$. L'équation caractéristique est $iz + 3 = 0$ et son seul zéro est $3i$. Dès lors, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions
$$f_H(x) = C\ e^{3ix},\ x \in \mathbb{R}$$

où $C$ est une constante arbitraire complexe.

Cherchons à présent une solution particulière sur $\mathbb{R}$ puisque le second membre $x \mapsto g(x) = 2x + i$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Comme on peut écrire $g(x)$ sous la forme $(2x+i)\ .\ e^{0x}$, produit d'un polynôme du premier degré et d'une exponentielle dont le coefficient 0 de l'argument n'est pas solution de l'équation caractéristique, il existe une solution de la forme $f_P(x) = Ax + B$ où $A$ et $B$ doivent être déterminés. Puisque $Df_P(x) = A$, on a

$$iDf_P(x) + 3f_P(x) = 2x + i \Leftrightarrow iA + 3Ax + 3B = 2x + i \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3A = 2 \\ iA + 3B = i \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 2/3 \\ B = i/9 \end{array} \right. .$$

Ainsi, on obtient une solution particulière

$$f_P(x) = \frac{2x}{3} + \frac{i}{9},\ x \in \mathbb{R}$$

et les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$f(x) = C\ e^{3ix} + \frac{2x}{3} + \frac{i}{9},\ x \in \mathbb{R}$$

où $C$ est une constante arbitraire complexe.

Déterminons la solution $f$ qui s'annule en 1 c'est-à-dire telle que $f(1) = 0$. On a $Ce^{3i} + 2/3 + i/9 = 0 \Leftrightarrow C\ e^{3i} + (6+i)/9 = 0 \Leftrightarrow C = (-6-i)\ e^{-3i}/9$. La solution cherchée est donc la fonction

$$f(x) = -\frac{6+i}{9}\ e^{3i(x-1)} + \frac{2x}{3} + \frac{i}{9},\ x \in \mathbb{R}.$$

2. Résolvons l'équation d'ordre 1 homogène $Df(x) - 2f(x) = 0$. L'équation caractéristique est $z - 2 = 0$ et son seul zéro est 2. Dès lors, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$f_H(x) = C\ e^{2x},\ x \in \mathbb{R}$$

où $C$ est une constante arbitraire complexe.

Cherchons maintenant une solution particulière sur $\mathbb{R}$, le second membre $x \mapsto g(x) = \cos(x)$ étant une fonction continue sur $\mathbb{R}$. De plus, comme l'équation est à coefficients réels et que $\cos(x) = \Re(e^{ix})$, une solution particulière sera donnée par la partie réelle d'une solution particulière de $DF(x) - 2\ F(x) = e^{ix}$. Le second membre de cette équation est l'exponentielle polynôme $1\ .\ e^{ix}$, produit d'un polynôme de degré 0 et d'une exponentielle dont le coefficient $i$ de l'argument n'est pas solution de l'équation caractéristique. Il existe donc une solution de la forme $F(x) = A\ e^{ix}$ où $A$ doit être déterminé. Puisque $DF(x) = Ai\ e^{ix}$, on a

$$DF(x) - 2F(x) = e^{ix} \Leftrightarrow Ai\ e^{ix} - 2A\ e^{ix} = e^{ix} \Leftrightarrow (-2+i)A = 1 \Leftrightarrow 5A = -2 - i \Leftrightarrow A = \frac{-2-i}{5}.$$

Ainsi, $F(x) = \dfrac{-2-i}{5}\ e^{ix} = \left(-\dfrac{2}{5} - \dfrac{i}{5}\right)(\cos(x) + i\sin(x))$ et, dès lors,

$$f_P(x) = \Re F(x) = -\frac{2}{5}\cos(x) + \frac{1}{5}\sin(x), x \in \mathbb{R}.$$

En conclusion, les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$f(x) = C\ e^{2x} - \frac{2}{5}\cos(x) + \frac{1}{5}\sin(x),\ x \in \mathbb{R}$$

où $C$ est une constante arbitraire complexe.

3. Résolvons l'équation d'ordre 1 homogène $2Df(x) + 4f(x) = 0$. L'équation caractéristique est $2z+4=0$ et son seul zéro est $-2$. Dès lors, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$f_H(x) = C\ e^{-2x},\ x \in \mathbb{R}$$

où $C$ est une constante arbitraire complexe.

Cherchons à présent une solution particulière sur $\mathbb{R}$ puisque le second membre $x \mapsto g(x) = e^{-2x}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Comme on peut écrire $g$ sous la forme de l'exponentielle polynôme $1\ .\ e^{-2x}$, produit d'un polynôme de degré 0 et d'une exponentielle dont le coefficient $-2$ de l'argument est solution simple de l'équation caractéristique, il existe une solution de la forme $f_P(x) = Ax\ e^{-2x}$ où $A$ doit être déterminé. Puisque $Df_P(x) = A\ e^{-2x} - 2Ax\ e^{-2x}$, on a

$$2Df_P(x) + 4f_P(x) = e^{-2x} \Leftrightarrow (2A - 4Ax)e^{-2x} + 4Ax\ e^{-2x} = e^{-2x} \Leftrightarrow 2A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, on obtient une solution particulière

$$f_P(x) = \frac{x}{2}e^{-2x},\ x \in \mathbb{R}$$

et les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$f(x) = \left(C + \frac{x}{2}\right)\ e^{-2x},\ x \in \mathbb{R}$$

où $C$ est une constante arbitraire complexe.

4. Résolvons l'équation d'ordre 2 homogène $D^2f(x) + Df(x) = 0$. L'équation caractéristique est $z^2 + z = 0$ dont les zéros sont $-1$ et $0$. Dès lors, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$f_H(x) = C_1\ e^{0x} + C_2\ e^{-x} = C_1 + C_2\ e^{-x},\ x \in \mathbb{R}$$

où $C_1$ et $C_2$ sont des constantes arbitraires complexes.

Cherchons à présent une solution particulière sur $\mathbb{R}$ puisque le second membre $x \mapsto g(x) = x\ e^x$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Comme $g$ est une exponentielle polynôme, produit d'un polynôme du premier degré et d'une exponentielle dont le coefficient 1 de l'argument n'est pas solution de l'équation caractéristique, il existe une solution de la forme $f_P(x) = (Ax + B)\ e^x$ où $A$ et $B$ doivent être déterminés. Puisque $Df_P(x) = A\ e^x + (Ax + B)\ e^x = (Ax + A + B)\ e^x$ et $D^2f(x) = A\ e^x + (Ax + A + B)\ e^x = (Ax + 2A + B)\ e^x$, on a

$$D^2f_P(x) + Df_P(x) = x\ e^x \Leftrightarrow (2Ax + 3A + 2B)\ e^x = x\ e^x \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2A = 1 \\ 3A + 2B = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A = 1/2 \\ B = -3/4 \end{array}\right. .$$

Ainsi, on obtient une solution particulière

$$f_P(x) = \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right)\ e^x,\ x \in \mathbb{R}$$

et les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$f(x) = C_1 + C_2\ e^{-x} + \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right)\ e^x,\ x \in \mathbb{R}$$

où $C_1$ et $C_2$ sont des constantes arbitraires complexes.

Déterminons la solution qui vaut 1 en 1 et dont la dérivée s'annule en 1 c'est-à-dire la solution $f$ telle que $f(1) = 1$ et $Df(1) = 0$. Comme $Df(x) = -C_2\ e^{-x} + (1/2 + x/2 - 3/4)\ e^x$, on a

$$\left\{\begin{array}{l} f(1) = 1 \\ Df(1) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1 + C_2\ e^{-1} - e/4 = 1 \\ -C_2\ e^{-1} + e/4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1 = 1 \\ C_2 = e^2/4 \end{array}\right. ;$$

la solution cherchée est donc la fonction

$$f(x) = 1 + \frac{e^{2-x}}{4} + \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right)\ e^x,\ x \in \mathbb{R}.$$

5. Résolvons l'équation d'ordre 2 homogène $D^2f(x) + 2Df(x) + f(x) = 0$. L'équation caractéristique est $z^2 + 2z + 1 = 0$ laquelle est équivalente à $(z+1)^2 = 0$, équation qui admet $-1$ comme zéro double. Dès lors, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$f_H(x) = (C_1x + C_2)\ e^{-x},\ x \in \mathbb{R}$$

où $C_1$ et $C_2$ sont des constantes arbitraires complexes.

Cherchons une solution particulière sur $\mathbb{R}$ puisque le second membre $x \mapsto g(x) = 1 + \sin(x)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Comme $g$ est une somme de deux fonctions, cherchons tout d'abord une solution particulière de $D^2f + 2Df + f = 1$ ; on voit immédiatement que la fonction constante 1 convient. Cherchons à présent une solution particulière de $D^2f(x) + 2Df(x) + f(x) = \sin(x)$. Comme l'équation est à coefficients réels et que $\sin(x) = \Im(e^{ix})$, une solution particulière sera donnée par la partie imaginaire d'une solution particulière de $D^2F(x) + 2DF(x) + F(x) = e^{ix}$. Le second membre de cette équation est l'exponentielle polynôme $1.e^{ix}$, produit d'un polynôme de degré 0 et d'une exponentielle dont le coefficient $i$ de l'argument n'est pas solution de l'équation caractéristique. Il existe donc une solution de la forme $F(x) = A\ e^{ix}$ où $A$ doit être déterminé. Puisque $DF(x) = Ai\ e^{ix}$ et $D^2f(x) = -A\ e^{ix}$, on a

$$D^2F(x) + 2DF(x) + F(x) = e^{ix} \Leftrightarrow (-A + 2Ai + A)\ e^{ix} = e^{ix} \Leftrightarrow 2iA = 1 \Leftrightarrow 2A = -i \Leftrightarrow A = -i/2.$$

Ainsi,

$$F(x) = -\frac{i}{2}\ e^{ix} = -\frac{i}{2}(\cos(x) + i\sin(x))$$

et, dès lors, une solution particulière $f_P$ de l'équation de départ est

$$f_P(x) = 1 + \Im F(x) = 1 - \frac{1}{2}\cos(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

En conclusion, les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$f(x) = (C_1x + C_2)\ e^{-x} + 1 - \frac{1}{2}\cos(x),\ x \in \mathbb{R}$$

où $C_1$ et $C_2$ sont des constantes arbitraires complexes.

6. Résolvons l'équation d'ordre 2 homogène $D^2f(x) + 4f(x) = 0$. L'équation caractéristique est $z^2 + 4 = 0$ ; elle est équivalente à l'équation $z^2 - 4i^2 = 0$ dont les zéros sont $2i$ et $-2i$. Dès lors, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$f_H(x) = C_1e^{2ix} + C_2e^{-2ix},\ x \in \mathbb{R}$$

où $C_1, C_2$ sont des constantes complexes ou, ce qui revient au même, les fonctions

$$f_H(x) = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x),\ x \in \mathbb{R}$$

où $C_1$ et $C_2$ sont des constantes arbitraires complexes.

Cherchons à présent une solution particulière sur $\mathbb{R}$ puisque le second membre $x \mapsto g(x) = \cos(2x)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Les coefficients de l'équation étant réels et $\cos(2x)$ étant la partie réelle de $e^{2ix}$, une solution particulière sera donnée par la partie réelle d'une solution particulière de $D^2F(x) + 4F(x) = e^{2ix}$. Le second membre de cette équation s'écrit $1\ .\ e^{2ix}$, produit d'un polynôme de degré 0 et d'une exponentielle dont le coefficient $2i$ de l'argument est solution simple de l'équation caractéristique. Il existe donc une solution de la forme $F(x) = Ax\ e^{2ix}$ où $A$ doit être déterminé. En appliquant la formule de Leibniz, on a

$$D^2F(x) = C_2^0 D^0(Ax).D^2(e^{2ix}) + C_2^1 D(Ax).D(e^{2ix}) + C_2^2 D^2(Ax).D^0(e^{2ix}) = -4Axe^{2ix} + 4iAe^{2ix}$$

et

$$D^2F(x) + 4F(x) = e^{2ix} \Leftrightarrow (-4Ax + 4iA + 4Ax)\ e^{2ix} = e^{2ix} \Leftrightarrow 4iA = 1 \Leftrightarrow 4A = -i \Leftrightarrow A = \frac{-i}{4}.$$

Ainsi,

$$F(x) = \frac{-ix}{4}\ e^{2ix} = -\frac{ix}{4}(\cos(2x) + i\sin(2x))$$

et, dès lors, une solution particulière $f_P$ de l'équation de départ est donnée par

$$f_P(x) = \Re F(x) = \frac{x}{4}\sin(2x), x \in \mathbb{R}.$$

En conclusion, les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$f(x) = C_1\cos(2x) + \left(C_2 + \frac{x}{4}\right)\sin(2x),\ x \in \mathbb{R}$$

où $C_1$ et $C_2$ sont des constantes arbitraires complexes.

Cherchons la solution qui s'annule en 0, ainsi que sa dérivée c'est-à-dire la solution telle que $f(0) = 0$ et $Df(0) = 0$. Comme $Df(x) = -2C_1\sin(2x) + \sin(2x)/4 + 2\,(C_2 + x/4)\cos(2x)$, on a

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ Df(0) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1 = 0 \\ 2C_2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{array}\right. ;$$

la solution cherchée est donc la fonction

$$f(x) = \frac{x}{4}\sin(2x),\ x \in \mathbb{R}.$$

## 2.15 Solutions des exercices de la "liste type 2003/2004"

**Exercice 1**

Représentation graphique : points d'ordonnée positive du demi-cercle centré à l'origine et de rayon $r$.

**Exercice 2**

a) $f(x) = (-i/2)e^{2i(x-1)} + 3i/2,\ x \in \mathbb{R}$.

b) $f(x) = e^{-x}(c + \arctan(e^x)),\ x \in \mathbb{R},\ c$ constante complexe arbitraire.

c) $f(x) = 1379/1454 + 8e^{9(1-x)}/729 + x^2/18 - x/81,\ x \in \mathbb{R}$.

d) $f(x) = -\sin(3x)/27 + x/9,\ x \in \mathbb{R}$.

e) $f(x) = (c_1x + c_2)e^{-x/3} + (x/16 - 3/32)e^x + 1,\ x \in \mathbb{R},\ c_1$ et $c_2$ constantes complexes arbitraires.

f) $f(x) = (c_1x + c_2 + x^2/18)e^{-x/3},\ x \in \mathbb{R},\ c_1$ et $c_2$ constantes complexes arbitraires.

g) $f(x) = c_1e^{(\sqrt{2}/2)(-1+i)x} + c_2e^{(\sqrt{2}/2)(1-i)x} - (1+i)/2\ e^x,\ x \in \mathbb{R},\ c_1$ et $c_2$ constantes complexes arbitraires.

h) $f(x) = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x) + \cos(x)/3,\ x \in \mathbb{R},\ c_1$ et $c_2$ constantes complexes arbitraires.

i) $f(x) = c_1\cos(2x) + (x/8 + c_2)\sin(2x) + 1/8,\ x \in \mathbb{R},\ c_1$ et $c_2$ constantes complexes arbitraires.

## 2.16 Solutions des exercices de la “liste type 2004/2005”

**Exercice 1**

L’équation différentielle n’est pas linéaire.

**Exercice 2**

a) $f(x) = (-1 - 3i/2)e^{2i(1-x)} + 3i/2,\ x \in \mathbb{R}$.
b) $f(x) = x^2/2 - 4x + 33/2 - 12\ e^{(1-x)/4},\ x \in \mathbb{R}$
c) $f(x) = x - 2\sin(x/2)\,,\ x \in \mathbb{R}$
d) $f(x) = C_1e^{-2x} + \left(C_2 + x^2/6 - x/9\right)e^x + e^{2x}/4,\ x \in \mathbb{R}$ où $C_1, C_2$ sont des constantes complexes arbitraires.

e) $f(x) = C_1\cos(x/2) + C_2\sin(x/2) + 3/2 - \sin(x)/3 + \cos(2x)/30,\ x \in \mathbb{R}$ où $C_1, C_2$ sont des constantes complexes arbitraires.
f) $f(x) = \left(C_1x + C_2 + x^2/2\right)e^{-2x},\ x \in \mathbb{R}$ où $C_1, C_2$ sont des constantes complexes arbitraires.

# Chapitre 3

# Calcul matriciel

## 3.1 Exercices sur les listes 6-7-8

Dans cette section figurent quelques exercices de base (dont il a été question durant les années académiques mentionnées).

**Liste 2002-2003**

1. Soient les matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ i & 2 & i+1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1/i & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Calculer (si possible)
$$iA,\ A+B,\ A+\widetilde{B},\ AA^*,\ AB,\ BA, B\overline{B}.$$

2. Calculer le déterminant des matrices suivantes.
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i & i \\ -i & i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Factoriser le déterminant des matrices suivantes.
$$\begin{pmatrix} 1-x & 2 \\ 2 & 1-x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x & x^2 & x^3 \\ y & y^2 & y^3 \\ z & z^2 & z^3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -a-x & a & 0 \\ b & -2b-x & b \\ 0 & a & -a-x \end{pmatrix}$$

4. Calculer (si elle existe) la matrice inverse de chacune des matrices suivantes.
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes. Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Pourquoi ? Si elles le sont, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. QCM + justifier la réponse
   - Si $A$ est une matrice carrée telle que $A^2 = 0$, alors $A$ est la matrice nulle Vrai □ Faux □
   - Le déterminant d'une matrice carrée dont les éléments sont des complexes est
     un complexe □ une matrice □ un polynôme □ aucune proposition correcte □
   - Si $A$ et $B$ sont des matrices carrées de même dimension qui vérifient $AB = A$, alors $B$ est la matrice identité Vrai □ Faux □
   - Si $A$ est une matrice qui vérifie $A = A^*$, si $c \in \mathbb{C}$ et si on pose $B = cA$, alors $B = B^*$
     Vrai □ Faux □
   - Si $M$ est une matrice qui vérifie $M\widetilde{M} = \mathbb{1}$, alors $M$ admet un inverse Vrai □ Faux □
   - Si $A, B$ sont deux matrices de même format, alors on a $A + B = B + A$ Vrai □ Faux □
   - Si $A, B$ sont deux matrices carrées de même dimension, alors on a $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
     Vrai □ Faux □
   - Les valeurs propres d'une matrice carrée réelle sont toujours des nombres réels
     Vrai □ Faux □
   - Une matrice carrée peut être inversible et avoir une valeur propre nulle Vrai □ Faux □
   - La somme de deux vecteurs propres de même valeur propre est encore un vecteur propre de même valeur propre Vrai □ Faux □

**Liste 2003-2004**

1. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2i \\ -1/i^3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ i & 2 & i+1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -i+2 & 3 \\ 4i & -i \end{pmatrix}.$$

   Si possible, effectuer les opérations suivantes. Si cela ne l'est pas, en expliquer la raison.

$$iA,\ C^*,\ A+B,\ A+\widetilde{B},\ AA^*,\ AB,\ BA,\ CB,\ CA.$$

2. Calculer le plus rapidement possible le déterminant de chacune des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} i & -1 \\ -2 & 5i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Le déterminant de la matrice suivante est un polynôme en $x$. Factoriser ce polynôme.

$$\begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 2 & 2-x \end{pmatrix}.$$

4. Calculer (si elle existe) la matrice inverse de chacune des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 2i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes. Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Pourquoi ? Si elle le sont, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. Répondre aux questions suivantes et justifier la réponse.
   - Si $A$ est une matrice carrée telle que $A^2 = 0$, alors $A$ est la matrice nulle Vrai □ Faux □

— Si $M$ est une matrice qui vérifie $M\widetilde{M} = \mathbb{1}$, alors $M$ admet un inverse Vrai ☐ Faux ☐
— Si $A, B$ sont deux matrices de même format, alors on a $A + B = B + A$ Vrai ☐ Faux ☐
— Si $A, B$ sont deux matrices carrées de même dimension, alors on a $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ Vrai ☐ Faux ☐
— Les valeurs propres d'une matrice carrée réelle sont toujours des nombres réels Vrai ☐ Faux ☐
— Une matrice carrée peut être inversible et avoir une valeur propre nulle Vrai ☐ Faux ☐
— La somme de deux vecteurs propres de même valeur propre est encore un vecteur propre de même valeur propre Vrai ☐ Faux ☐
— La somme de deux valeurs propres d'une même matrice est encore une valeur propre de cette matrice Vrai ☐ Faux ☐
— Si le complexe $\lambda_0$ est une valeur propre de la matrice $M$ alors $\overline{\lambda_0}$ est une valeur propre de la matrice $\overline{M}$ Vrai ☐ Faux ☐
— Si un complexe est une valeur propre d'une matrice, alors il est aussi valeur propre de la matrice transposée Vrai ☐ Faux ☐

**Liste 2004/2005**

1. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2i & 2i^4 & (1+i)^2/i^3 \\ 0 & -1 & 1-i \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ i & 2 & i+1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -3i+1 & 3 \\ 4i & -i \end{pmatrix}.$$

Si possible, effectuer les opérations suivantes. Si cela ne l'est pas, en expliquer la raison.

$$\widetilde{iA},\ (iB)^*,\ A+B,\ A+\widetilde{B},\ AA^*,\ AB,\ BA,\ CB.$$

2. Déterminer la forme générale des matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (resp. avec la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ).

3. Calculer le plus rapidement possible le déterminant de chacune des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} i+1 & 1 \\ -2i & 5 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Le déterminant des matrices suivantes est un polynôme en $x$. Factoriser ce polynôme en un produit de facteurs du premier degré.

$$\begin{pmatrix} 2-x & -4 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2-x & -4 \\ -1 & x+1 \end{pmatrix}.$$

5. Calculer (si elle existe) la matrice inverse de chacune des matrices suivantes (on donne $\alpha \in \mathbb{R}$).

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes. Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Pourquoi ? Si elles le sont, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & i+1 \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Répondre aux questions suivantes et justifier la réponse.
   — Si $A$ est une matrice carrée telle que $A^2 = A$, alors $A$ est la matrice nulle ou est la matrice identité

   Vrai □ Faux □
   — Si $M$ est une matrice carrée qui vérifie $M\widetilde{M} = \mathbb{1}$, alors $M$ vérifie aussi $\widetilde{M}M = \mathbb{1}$

   Vrai □ Faux □
   — Si $A, B$ sont deux matrices de même format, alors on a $A(A+B) = A^2 + AB$

   Vrai □ Faux □
   — Si $A, B$ sont deux matrices carrées de même dimension, alors on a $A^2 - B^2 = (A-B)\ (A+B)$

   Vrai □ Faux □
   — Une matrice carrée peut être inversible et avoir une valeur propre nulle Vrai □ Faux □
   — La somme de deux vecteurs propres de même valeur propre est encore un vecteur propre de même valeur propre Vrai □ Faux □
   — La somme de deux vecteurs propres de valeur propre nulle est encore un vecteur propre de valeur propre nulle Vrai □ Faux □
   — La trace du produit de deux matrices carrées de même dimension reste la même si on permute l'ordre des facteurs du produit. Vrai □ Faux □

## 3.2 Résolution des exercices de la "liste type 2002/2003"

**Exercice 1**

• On a

$$iA = \begin{pmatrix} i & 0 & -i \\ -1 & 2i & -1+i \end{pmatrix}.$$

• La matrice $A$ est une matrice de format $2\times 3$ tandis que $B$ est une matrice de format $3\times 2$. Ces matrices n'ayant pas le même format, il est impossible de les additionner.

• Puisque $B$ est une matrice de format $3 \times 2$, $\widetilde{B}$ est de format $2 \times 3$ et peut être additionné à $A$, matrice de même format. On a

$$A + \widetilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ i & 2 & 1+i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1/i & -1 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1/i & -2 \\ 0 & 2 & 2+i \end{pmatrix}.$$

• Puisque $A$ est une matrice de format $2 \times 3$, $A^*$ est une matrice de format $3 \times 2$ ; le produit $AA^*$ est donc possible et donne une matrice de format $2 \times 2$. On a

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 2 \\ -1 & 1+i \end{pmatrix} \text{ donc } A^* = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 2 \\ -1 & 1-i \end{pmatrix};$$

ainsi,

$$AA^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ i & 2 & 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 2 \\ -1 & 1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

• Le produit $AB$ est possible puisque $A$ est de format $2 \times 3$ et $B$ de format $3 \times 2$ ; le produit est une matrice de format $2 \times 2$. On a

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ i & 2 & 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1-i \\ -1-2i & 2+i \end{pmatrix}.$$

• Le produit $BA$ est possible puisque $B$ est de format $3 \times 2$ et $A$ de format $2 \times 3$ ; le produit est une matrice de format $3 \times 3$. On a

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ i & 2 & 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2i & -i \\ -i & 0 & i \\ -1+i & 2 & 2+i \end{pmatrix}.$$

• Le nombre de colonnes de $B$ est différent du nombre de lignes de $\overline{B}$ ; le produit $B\overline{B}$ est donc impossible.

**Exercice 2**

• On a $\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = 1.5 - (-1).(-2) = 3.$

• On a $\det\begin{pmatrix} i & i \\ -i & i \end{pmatrix} = i^2 + i^2 = -2.$

• On a

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} && \text{si on remplace } L_1 \text{ par } L_1 + L_3 \\
&= (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 && \text{en développant le déterminant selon la première ligne.}
\end{aligned}$$

**Exercice 3**

• On a $\det\begin{pmatrix} 1-x & 2 \\ 2 & 1-x \end{pmatrix} = (1-x)^2 - 4 = (1-x-2)(1-x+2) = (-x-1)(3-x).$

• On a

$$\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix} x & x^2 & x^3 \\ y & y^2 & y^3 \\ z & z^2 & z^3 \end{pmatrix} \\
&= xyz\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} && \text{mise en évidence du facteur } x \text{ sur } L_1,\ y \text{ sur } L_2 \text{ et } z \text{ sur } L_3 \\
&= xyz\begin{vmatrix} 0 & x-z & x^2-z^2 \\ 0 & y-z & y^2-z^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} && \text{si on remplace } L_1 \text{ par } L_1 - L_3 \text{ et } L_2 \text{ par } L_2 - L_3 \\
&= xyz(x-z)(y-z)\begin{vmatrix} 0 & 1 & x+z \\ 0 & 1 & y+z \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} && \text{mise en évidence du facteur } \left\{\begin{array}{l} x-z \text{ sur } L_1 \\ y-z \text{ sur } L_2 \end{array}\right. \\
&= xyz(x-z)(y-z)\begin{vmatrix} 1 & x+z \\ 1 & y+z \end{vmatrix} && \text{en développant le déterminant selon la première colonne} \\
&= xyz(x-z)(y-z)(y+z-x-z) \\
&= xyz(x-z)(y-z)(y-x).
\end{aligned}$$

• On a $\det\begin{pmatrix} -a-x & a & 0 \\ b & -2b-x & b \\ 0 & a & -a-x \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} -x & a & 0 \\ -x & -2b-x & b \\ -x & a & -a-x \end{vmatrix} && \text{si on remplace } C_1 \text{ par } C_1 + C_2 + C_3 \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 0 & a+x \\ -x & -2b-x & b \\ -x & a & -a-x \end{vmatrix} && \text{si on remplace } L_1 \text{ par } L_1 - L_3 \\
&= (a+x)\begin{vmatrix} -x & -2b-x \\ -x & a \end{vmatrix} && \text{en développant le déterminant selon la première ligne} \\
&= -x(a+x)\begin{vmatrix} 1 & -2b-x \\ 1 & a \end{vmatrix} && \text{mise en évidence du facteur } (-x) \text{ sur } C_1 \\
&= -x(a+x)(a+2b+x).
\end{aligned}$$

**Exercice 4**

• Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Puisque $\det A = 2 - 1 = 1 \neq 0$, la matrice $A$ est inversible. Déterminons les cofacteurs $(\mathcal{A})_{i,j}$ des éléments $(A)_{i,j},\ (i,j = 1,2)$ de $A$.
On a $(\mathcal{A})_{1,1} = 2,\ (\mathcal{A})_{1,2} = 1,\ (\mathcal{A})_{2,1} = 1,\ (\mathcal{A})_{2,2} = 1$. On obtient ainsi

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

• Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} && \text{si on remplace } L_3 \text{ par } L_3 - L_1 \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} && \text{en développant le déterminant selon la première colonne} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Puisque $\det A \neq 0$, la matrice inverse existe.
Déterminons les cofacteurs $(\mathcal{A})_{i,j}$ des éléments $(A)_{i,j},\ (i,j = 1,2,3)$ de $A$. On a

$(\mathcal{A})_{1,1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2;\quad (\mathcal{A})_{1,2} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1;\quad (\mathcal{A})_{1,3} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1;$

$(\mathcal{A})_{2,1} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1;\quad (\mathcal{A})_{2,2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;\quad (\mathcal{A})_{2,3} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1;$

$(\mathcal{A})_{3,1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1;\quad (\mathcal{A})_{3,2} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1;\quad (\mathcal{A})_{3,3} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

Ainsi, on obtient

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 5**

5.1) Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

— Le polynôme caractéristique de $A$ est

$$\det(A - \lambda\,\mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\,(2-\lambda) - 2 = 2 - 3\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - 3\lambda = \lambda(\lambda - 3).$$

Les valeurs propres de $A$ sont donc 0 et 3 ; ces valeurs propres étant simples, la matrice $A$ est diagonalisable.

— Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 c'est-à-dire les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $(A - 0\,\mathbb{1})X = 0$. On a

$$(A - 0\,\mathbb{1})X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow X = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 sont donc les vecteurs

$$X = c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

— Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre 3 c'est-à-dire les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $(A - 3\ \mathbb{1})X = 0$. On a

$$(A - 3\ \mathbb{1})X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2x + y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow 2x - y = 0 \Leftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 3 sont donc les vecteurs

$$X = c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad c \in \mathbb{C}_0.$$

— La matrice $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ est telle que $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5.2) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

— Le polynôme caractéristique de $A$ est

$$\det(A - \lambda\ \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2.$$

La matrice $A$ possède donc la valeur propre double 1.

— Cherchons les vecteurs propres associés cette valeur propre 1 c'est-à-dire les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $(A - \mathbb{1})X = 0$. On a

$$(A - \mathbb{1})X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à cette valeur propre sont donc les vecteurs

$$X = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

Comme ils sont tous multiples du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, deux vecteurs propres sont toujours linéairement dépendants et donc la matrice $A$ n'est pas diagonalisable.

5.3) Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$.

— Le polynôme caractéristique de $A$ est

$$\det(A - \lambda\ \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & i \\ -i & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + i^2 = (1-\lambda)^2 - 1 = (1-\lambda-1)(1-\lambda+1) = -\lambda(2-\lambda).$$

Les valeurs propres de $A$ sont donc 0 et 2 ; puisque ces valeurs propres sont simples, la matrice $A$ est diagonalisable.

— Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 c'est-à-dire les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $(A - 0\ \mathbb{1})X = 0$. On a

$$(A - 0\ \mathbb{1})X = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + iy = 0 \\ -ix + y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x + iy = 0 \Leftrightarrow X = y \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 sont donc les vecteurs

$$X = c \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

— Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre 2 c'est-à-dire les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $(A - 2\,\mathbb{1})X = 0$. On a

$$(A - 2\,\mathbb{1})X = \begin{pmatrix} -1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x + iy = 0 \\ -ix - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -x + iy = 0 \Leftrightarrow X = y \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 2 sont donc les vecteurs

$$X = c \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

— La matrice $S \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est telle que $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5.4) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

— Le polynôme caractéristique de $A$ est

$$\det(A - \lambda\,\mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3.$$

La matrice $A$ admet donc la valeur propre triple 1.

— Cherchons les vecteurs propres associés à cette valeur propre 1 c'est-à-dire les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $(A - \mathbb{1})X = 0$. On a

$$(A - \mathbb{1})X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à cette valeur propre 1 sont donc les vecteurs

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C} \quad \text{non simultanément nuls.}$$

Trois vecteurs propres sont donc toujours linéairement dépendants ; la matrice $A$ n'est donc pas diagonalisable.

5.5) Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

— Le polynôme caractéristique de $A$ est

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda\,\mathbb{1}) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ 3 & 2-\lambda & -3 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ 3 & 2-\lambda & -3 \\ 1+\lambda & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} && \text{si on remplace } L_3 \text{ par } L_3 - L_1 \\
&= \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1-\lambda \\ 3 & 2-\lambda & 0 \\ 1+\lambda & 0 & 0 \end{vmatrix} && \text{si on remplace } C_3 \text{ par } C_3 + C_1 \\
&= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 3 & 2-\lambda \\ 1+\lambda & 0 \end{vmatrix} && \text{en développant selon la troisième colonne} \\
&= (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+1)
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de $A$ sont donc $-1$, 1 et 2 ; puisque ces valeurs propres sont simples, la matrice est diagonalisable.

— Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre $-1$ c'est-à-dire les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $(A+\mathbb{1})X = 0$. On a successivement

$$(A+\mathbb{1})X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - y + z = 0 & (1) \\ x + y - z = 0 & (2) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x = 0 & (1)+(2) \\ 2y - 2z = 0 & (2)-(1) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad X = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre $-1$ sont donc les vecteurs

$$X = c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

— Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 c'est-à-dire les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $(A-\mathbb{1})X = 0$. On a successivement

$$(A-\mathbb{1})X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x - y + z = 0 & (1) \\ 3x + y - 3z = 0 & (2) \\ x - y - z = 0 & (3) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4x - 4z = 0 & (2)+(3) \\ y = 0 & (1)+(3) \\ x - y - z = 0 & (3) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont donc les vecteurs

$$X = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

— Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre 2 c'est-à-dire les vecteurs non nuls

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $(A - 2\,\mathbb{1})X = 0$. On a successivement

$$(A-2\,\mathbb{1})X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} -2x-y+z=0 \\ 3x-3z=0 \\ x-y-2z=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} -2x-y+z=0 \\ x-z=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x=z \\ y=-z \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad X = z\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 2 sont donc les vecteurs

$$X = c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c \in \mathbb{C}_0.$$

— La matrice $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est telle que $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

**Exercice 6**

- Faux : le carré de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice nulle mais $A$ n'est pas une matrice nulle.
- Un complexe comme somme et produit de complexes.
- Faux : si $A$ est la matrice nulle on a l'égalité pour toute matrice $B$.
- Faux : $B^* = \bar{c}A$.
- Vrai : le déterminant de $M$ est non nul.
- Vrai : l'addition des matrices est une opération commutative.
- Faux : le produit des matrices n'est pas commutatif.
- Faux : les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont égales à $-i$ et $i$.
- Faux : le déterminant d'une matrice carrée est égal au produit de ses valeurs propres.
- Faux : si un vecteur est un vecteur propre d'une valeur propre, son opposé l'est aussi.

**REMARQUES IMPORTANTES**

Lors de l'inversion et de la diagonalisation de matrices, on vérifie aisément que la solution trouvée est correcte.

— Quand on a déterminé la matrice inverse d'une matrice donnée, on vérifie que le résultat est correct en effectuant le produit de la matrice de départ par la matrice trouvée. On doit obtenir la matrice identité.

— Quand on a déterminé une forme diagonale $\Delta$ de la matrice de départ $A$ et une matrice $S$ qui y conduit, pour savoir si le résultat est correct, on doit vérifier que $S^{-1}AS = \Delta$, ce qui est équivalent à la vérification de l'égalité (bien plus simple !) $AS = S\Delta$.

## 3.3 Solutions des exercices de la "liste type 2003/2004"

**Exercice 1**

$iA = \begin{pmatrix} -2i & -2 \\ 1 & 0 \\ -i & i \end{pmatrix}$ ; $C^* = \begin{pmatrix} 2+i & -4i \\ 3 & i \end{pmatrix}$ ; $A+B$ impossible car matrices de formats différents ;

$A+\tilde{B}=\begin{pmatrix} -1 & 3i \\ -i & 2 \\ -2 & 2+i \end{pmatrix}$ ; $AA^*=\begin{pmatrix} 8 & -2i & 2+2i \\ 2i & 1 & i \\ 2-2i & -i & 2 \end{pmatrix}$ ; $AB=\begin{pmatrix} -4 & 4i & 2i \\ -i & 0 & i \\ -1+i & 2 & 2+i \end{pmatrix}$ ;
$BA=\begin{pmatrix} -1 & -1+2i \\ -1-5i & -1+i \end{pmatrix}$ ; $CB=\begin{pmatrix} 2+2i & 6 & 1+4i \\ 1+4i & -2i & 1-5i \end{pmatrix}$ ;
$CA$ impossible car le nombre de colonnes de $C$ n'est pas égal au nombre de lignes de $A$.

**Exercice 2**

$-7, -6, 0$.

**Exercice 3**

$x(x-3)$.

**Exercice 4**

$\begin{pmatrix} 2 & i \\ -1 & -i \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

**Exercice 5**

**Première matrice** : valeurs propres simples 0 et 3 donc matrice diagonalisable.
Vecteurs propres relatifs à la valeur propre 0 : $c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.
Vecteurs propres relatifs à la valeur propre 3 : $c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.
La matrice $S=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est telle que $S^{-1}AS=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

**Deuxième matrice** : valeur propre double 1.
Vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 : $c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$ donc matrice non diagonalisable.

**Troisième matrice** : valeurs propres simples 0 et 2 donc matrice diagonalisable.
Vecteurs propres relatifs à la valeur propre 0 : $c\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.
Vecteurs propres relatifs à la valeur propre 2 : $c\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.
La matrice $S=\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est telle que $S^{-1}AS=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

**Quatrième matrice** : valeur propre triple 1.
Vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 : $c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ non simultanément nuls ; la matrice n'est donc pas diagonalisable.

**Cinquième matrice** : valeurs propres $-2$ (simple) et 7 (double).
Vecteurs propres relatifs à la valeur propre 7 : $c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ non simultanément nuls.
Vecteurs propres relatifs à la valeur propre $-2$ : $c\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.

La matrice $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ est telle que $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

**Exercice 6**

- Faux : le carré de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice nulle mais $A$ n'est pas une matrice nulle.
- Vrai : dans ce cas $M$ admet un inverse.
- Vrai : l'addition des matrices est une opération commutative.
- Faux : le produit des matrices n'est pas commutatif.
- Faux : les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont égales à $-i$ et $i$.
- Faux : le déterminant d'une matrice carrée est égal au produit de ses valeurs propres.
- Faux : si un vecteur est un vecteur propre d'une valeur propre, son opposé l'est aussi.
- Faux : les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont égales à $-i$ et $i$ mais 0 n'est pas valeur propre de $A$.
- Vrai : si $\det(M - \lambda_0 \mathbb{1}) = 0$ alors $\det(\overline{M} - \overline{\lambda_0} \mathbb{1}) = 0$.
- Vrai : le déterminant d'une matrice carrée est égal au déterminant de sa transposée.

## 3.4 Solutions des exercices de la "liste type 2004/2005"

**Exercice 1**

$$\widetilde{iA} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2i & -i \\ -2i & 1+i \end{pmatrix} \qquad (iB)^* = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 0 & -2i \\ i & -1-i \end{pmatrix} \qquad A+B = \begin{pmatrix} 1-2i & 2 & -3 \\ i & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$A + \widetilde{B}$ : impossible car $A$ et $\widetilde{B}$ ne sont pas de même format.

$AA^* = \begin{pmatrix} 12 & -4-2i \\ -4+2i & 3 \end{pmatrix}$

$AB$ : impossible car le nombre de colonnes de $A$ (3) diffère du nombre de lignes de $B$ (2).
$BA$ : impossible car le nombre de colonnes de $B$ (3) diffère du nombre de lignes de $A$ (2).

$CB = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2+6i \\ 1+4i & -2i & 1-5i \end{pmatrix}$

**Exercice 2**

Toute matrice commute avec $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Toute matrice diagonale commute avec $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Toute matrice du type $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$ commute avec $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

**Exercice 3**

Le premier déterminant est égal à $5 + 7i$ et le second à $\frac{7}{9}$.

**Exercice 4**

Le premier déterminant se factorise sous la forme $(3-x)(x+2)$ et le second sous la forme

$$-\left(x - \frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)\left(x - \frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right).$$

**Exercice 5**

Les matrices inverses sont

$$\begin{pmatrix} -1 & -i \\ 0 & -i \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 6**

— Matrice $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ : valeurs propres : 0 et 4.

Vecteurs propres relatifs à $\lambda = 0 : c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{C}_0$.

Vecteurs propres relatifs à $\lambda = 4 : c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{C}_0$.

Cette matrice $A$ est diagonalisable ; si $S = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

— Matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ : valeur propre : 2 (double).

Vecteurs propres relatifs à $\lambda = 2 : c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{C}_0$.

Cette matrice n'est pas diagonalisable car elle ne possède pas deux vecteurs linéairement indépendants.

— Matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ : valeur propre : 2 (double).

Vecteurs propres relatifs à $\lambda = 2 : c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c'\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $c, c' \in \mathbb{C}$ non simultanément nuls.

Cette matrice $A$ est déjà diagonale.

— Matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}$ : valeurs propres : $-i$ et $2+i$.

Vecteurs propres relatifs à $\lambda = -i : c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{C}_0$.

Vecteurs propres relatifs à $\lambda = 2+i : c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{C}_0$.

Cette matrice $A$ est diagonalisable ; si $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & 2+i \end{pmatrix}$.

— Matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ : valeur propre : 1 (triple).

Vecteurs propres relatifs à $\lambda = 1 : c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c'\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $c, c' \in \mathbb{C}$ non simultanément nuls.

Cette matrice n'est pas diagonalisable car elle ne possède pas trois vecteurs propres linéairement indépendants.

— Matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ : valeurs propres : $-1$ (simple) et 2 (double).

Vecteurs propres relatifs à $\lambda = 2 : c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c'\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ avec $c, c' \in \mathbb{C}$ non simultanément nuls.

Vecteurs propres relatifs à $\lambda = -1 : c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{C}_0$.

Cette matrice $A$ est diagonalisable ; si $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

**Exercice 7**

- Faux : le carré de $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice $A$ mais $A$ n'est ni la matrice nulle ni l'identité.
- Vrai : dans ce cas $M$ admet un inverse.
- Faux : si $A$ et $B$ sont de format $m \times p$ alors $A + B$ est de format $m \times p$ mais le produit est impossible sauf si $m = p$.
- Faux : le produit matriciel n'est pas commutatif.
- Faux : le déterminant de la matrice doit être non nul or il est égal au produit des valeurs propres de la matrice.
- Faux : un vecteur propre et son opposé (vecteur propre de la meme valeur propre) est le vecteur nul jamais vecteur propre.
- Faux : cf ci-dessus.
- Vrai : propriété (cf théorie).

# Chapitre 4

# Listes d'exercices 2025 - 2026 : corrigé

## Liste 1 : fonctions élémentaires

**I. Eléments de base relatifs aux fonctions**

1. **Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous. Si la fonction est composée, mentionner de quelles fonctions élémentaires elle est la composée**

$$f_1(x) = \frac{1}{2-|x+1|}, \quad f_2(x) = \ln(-x^2-2x+3), \quad f_3(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}, \quad f_4(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}$$

$$f_5(x) = \ln(e^x-1), \quad f_6(x) = \ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right), \quad f_7(x) = \arcsin(x^2-1)$$

| Fonction | dom$(f)$ |
|---|---|
| $f_1 : \ x \mapsto 1/(2-\vert x+1\vert)$ | $\mathbb{R} \setminus \{-3,\ 1\}$ |
| $f_2 : \ x \mapsto \ln(-x^2-2x+3)$ | $]-3, 1[$ |
| $f_3 : \ x \mapsto \sqrt{(x-1)/(x-2)}$ | $]-\infty, 1] \cup\ ]2, +\infty[$ |
| $f_4 : \ x \mapsto \sqrt{x-1}/\sqrt{x-2}$ | $]2, +\infty[$ |
| $f_5 : \ x \mapsto \ln(e^x-1)$ | $]0, +\infty[$ |
| $f_6 : \ x \mapsto \ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$ | $\mathbb{R}$ |
| $f_7 : \ x \mapsto \arcsin(x^2-1)$ | $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ |

Si la fonction donnée est égale à $f \circ g$ alors on a

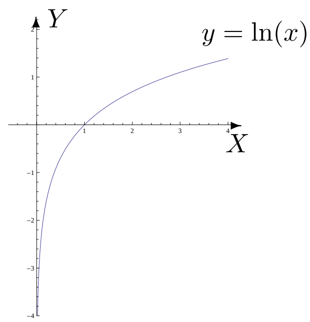
- pour $f_2 : x \mapsto \ln(-x^2-2x+3)$ on a les fonctions $g : x \mapsto -x^2-2x+3$ et $f : y \mapsto \ln(y)$
- pour $f_3 : x \mapsto \sqrt{(x-1)(x-2)}$ on a les fonctions $g : x \mapsto (x-1)/(x-2)$ et $f : y \mapsto \sqrt{y}$
- pour $f_7 : x \mapsto \arcsin(x^2-1)$ on a les fonctions $g : x \mapsto x^2-1$ et $f : y \mapsto \arcsin(y)$

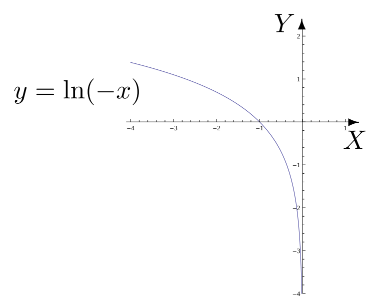
2. **Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous et les représenter graphiquement (uniquement en se servant des symétries et des représentations graphiques de** ln **et de l'exponentielle).**

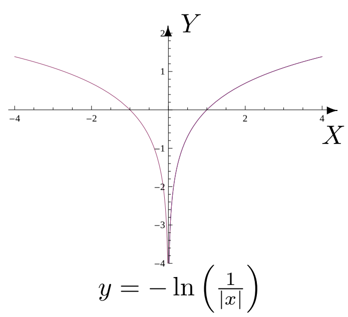
$$f_1(x) = \ln(-x), \quad f_2(x) = -\ln\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad f_3(x) = |-\ln(x)|, \quad f_4(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

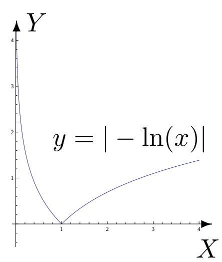
$$f_5(x) = -\exp(x), \quad f_6(x) = \exp(x+1), \quad f_7(x) = \exp(x) + 1$$

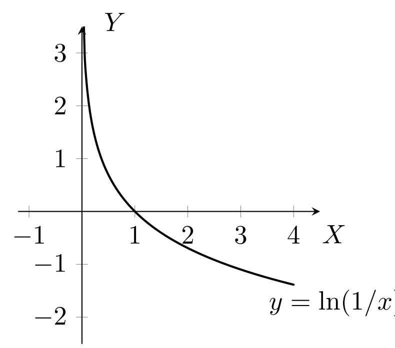
Le domaine de définition de la première fonction est $]-\infty, 0[$ ; celui de la deuxième est $\mathbb{R}_0$ et celui de la troisième et de la quatrième est $]0, +\infty[$.
Le domaine de définition des 3 fonctions exponentielles est $\mathbb{R}$.

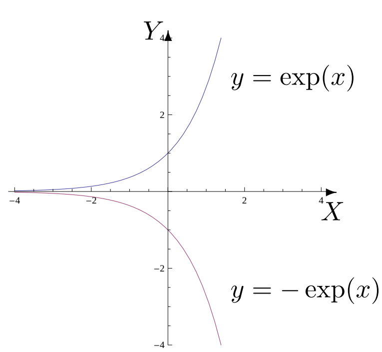


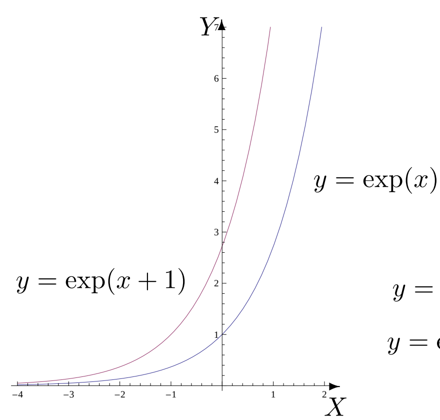



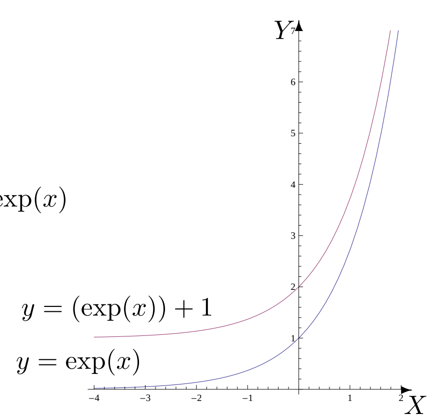



## II. Manipulation des fonctions élémentaires

1. **Simplifier les expressions suivantes au maximum**

$$(a)\ \ln(\cos(\pi/3)) + \ln\left((\sin(4\pi/3)^2\right),\quad (b)\ \tan\left(\ln(e^{3\pi}/2)\right),\quad (c)\ \exp(3\ln(2e)),\quad (d)\ \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$(e)\ \arcsin\left(\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right),\ (f)\ \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\ (g)\ \tan\left(\arctan\left(\frac{\pi}{2}\right)\right),\ (h)\ \arctan\left(\tan\left(\frac{4\pi}{7}\right)\right).$$

Les expressions sont définies et valent respectivement (1) $\ln(3) - 3\ln(2)$, (2) $-\tan(\ln(2))$, (3) $8e^3$
(4) $-\frac{\pi}{3}$, (5) $\frac{\pi}{5}$, (6) $\frac{\pi}{6}$, (7) $\frac{\pi}{2}$, (8) $-\frac{3\pi}{7}$.

## III. Limites des valeurs des fonctions

1. **Se rappeler les limites relatives aux fonctions élémentaires et en déduire rapidement les quelques limites suivantes**

$$(a)\ \lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{1}{x}\right),\quad (b)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\ln(x^2)},\quad (c)\ \lim_{x\to 1^+}\arctan\left(\frac{1}{x-1}\right).$$

La limite $(a)$ n'existe pas, la limite $(b)$ vaut $0^+$ et la limite $(c)$ vaut $\left(\frac{\pi}{2}\right)^-$.

2. **Calculer (si possible) les limites suivantes, *sans appliquer le théorème de l'Hospital***

$$(a)\ \lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}\qquad (b)\ \lim_{x\to+\infty}(-x^2-2x)\qquad (c)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+x^6}}{x^3}$$

$$(d)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{\text{cotan }(x)}{\sin(3x)}\qquad (e)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan\ (x)}{\sin(2x)}\qquad (f)\ \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{|1-x|}$$

$$(g)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^2+5x}{x^2+3}\qquad (h)\ \lim_{x\to+\infty}(\ln(3x+2)-\ln(3x))\qquad (i)\ \lim_{x\to+\infty}\ln(|-x+\pi|)$$

Toutes ces limites peuvent être envisagées et sont respectivement égales à
(a) $\infty$ (b) $-\infty$ (c) $(-1)^-$ (d) $+\infty$ (e) $(1/2)^+$ (f) $(-2)^+$ (g) $(-2)^-$ (h) $0^+$
(i) $+\infty$

## IV. Continuité et dérivation

1. **On donne des fonctions par les expressions explicites suivantes. En déterminer le domaine de définition, de continuité, de dérivabilité et en calculer la dérivée première.**

$$f_1(x) = \sqrt[5]{3x^2+1}\qquad f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2+x}}\qquad f_3(x) = \frac{1}{3x^2+6x+3}\qquad f_4(x) = \arctan(\cos(x))$$

$$f_5(x) = \sqrt{\sin(2x)}\qquad f_6(x) = \sin(\text{cotan}(x))\qquad f_7(x) = \ln(x^4)\qquad f_8(x) = \ln(x^2+x-2)$$

Si on note $A$ le domaine de définition des fonctions, $B$ leur domaine de continuité et $C$ leur domaine de dérivabilité, on a les résultats suivants

| Fonction | $A = B$ | $C$ | Dérivée |
|---|---|---|---|
| $f_1(x) = \sqrt[5]{3x^2+1}$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $\dfrac{6x}{5\sqrt[5]{(3x^2+1)^4}}$ |
| $f_2(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$ | $]-2,+\infty[$ | $]-2,+\infty[$ | $\dfrac{-1}{2\sqrt{(2+x)^3}}$ |
| $f_3(x) = \dfrac{1}{3x^2+6x+3}$ | $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ | $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ | $\dfrac{-2}{3(x+1)^3}$ |
| $f_4(x) = \arctan(\cos(x))$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $\dfrac{-\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$ |
| $f_5(x) = \sqrt{\sin(2x)}$ | $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right]$ | $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$ | $\dfrac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}$ |
| $f_6(x) = \sin(\text{cotan}(x))$ | $\mathbb{R}\setminus\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$ | $\mathbb{R}\setminus\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$ | $\dfrac{-\cos(\text{cotan}(x))}{\sin^2(x)}$ |
| $f_7(x) = \ln(x^4)$ | $\mathbb{R}_0$ | $\mathbb{R}_0$ | $\dfrac{4}{x}$ |
| $f_{10}(x) = \ln(x^2+x-2)$ | $]-\infty,-2[\,\cup\,]1,+\infty[$ | $]-\infty,-2[\,\cup\,]1,+\infty[$ | $\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$ |

2. **On donne la fonction $g$ dérivable sur $]-1,1[$ et la fonction $f : t \mapsto f(t) = g(\ln(t))$.**
   **a) Déterminer le domaine de dérivabilité de $f$.**
   **b) Calculer la dérivée de $f$ en fonction de la dérivée de $g$.**
   **c) Mêmes questions si $g$ est dérivable sur $]0,3[$ et si $f$ est la fonction $y \mapsto f(y) = g(\sqrt{y^2-1})$.**

   a) Le plus grand ouvert dans lequel $f$ est dérivable est $]1/e, e[$.

   b) Sur son domaine de dérivabilité, on a $Df(t) = D_u g(u)|_{u=\ln(t)} \times 1/t$.

   c) Le domaine de dérivabilité de $f$ est $]-\sqrt{10},-1[\,\cup\,]1,\sqrt{10}[$ ; dans cet ensemble, sa dérivée vaut
   $$Df(y) = D_u g(u)|_{u=\sqrt{y^2-1}} \times \frac{y}{\sqrt{y^2-1}}.$$

3. **Soit $F : t \mapsto F(t) = f(x(t))$ avec $x(3) = 2$, $Dx(3) = 5$ et $(D_x f)(2) = -4$. En supposant $F$ dérivable en 3, que vaut $(DF)(3)$ ?**

   La dérivée de $F$ en 4 vaut -20.

## V. Théorème de l'Hospital

1. **Calculer les limites suivantes (dans chaque cas, si ce n'est pas possible ou si elle n'existe pas, en donner la raison)**

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(2x)}{x+1}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(2x)}{x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x^3}\ln(\sqrt[5]{x})$ (5) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1/|x|)}{\sqrt{x^2}}$ (6) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2+1}{\arctan(x^2+2)}$

(7) $\displaystyle\lim_{t\to 1^+} (1-t)\ln(t^2-1)$ (8) $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{\ln(x-2)}{|2-x|}$ (9) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2-3x-4)}{x-4}$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \big(\ln(|2-x|)-\ln(x^2)\big)$ (11) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{1+\cos(x)}{\sin(x)}$ (12) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3}$

(13) $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} \frac{u^2}{e^{3u}}$ (14) $\displaystyle\lim_{y\to-\infty} y\,e^{-y^2}$ (15) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{\sqrt{\exp(x^2)}}$

| Fonction | dom($f$) | Limite |
|---|---|---|
| (1) $f(x) = \cos(2x)/(x+1)$ | $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ | $\lim\limits_{x\to 0^+} \cos(2x)/(x+1) = 1^-$ |
| (2) $f(x) = x\ln(2+1/x)$ | $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[ \cup ]0,+\infty[$ | $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln(2+1/x) = +\infty$ |
| (3) $f(x) = \arcsin(2x)/x$ | $\left[-\frac{1}{2}, 0\right[ \cup \left]0, \frac{1}{2}\right]$ | $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin(2x)/x = 2$ |
| (4) $f(x) = \sqrt{x^3}\ln(\sqrt[5]{x})$ | $]0,+\infty[$ | $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x^3}\ln(\sqrt[5]{x}) = 0$ |
| (5) $f(x) = \ln(1/\lvert x\rvert)/\sqrt{x^2}$ | $\mathbb{R}_0$ | $\lim\limits_{x\to -\infty} \ln(1/\lvert x\rvert)/\sqrt{x^2} = 0$ |
| (6) $f(x) = (3x^2+1)/\arctan(x^2+2)$ | $\mathbb{R}$ | $\lim\limits_{x\to -\infty} (3x^2+1)/\arctan(x^2+2) = +\infty$ |
| (7) $f(x) = (1-t)\ln(t^2-1)$ | $]-\infty,-1[ \cup ]1,+\infty[$ | $\lim\limits_{t\to 1^+} (1-t)\ln(t^2-1) = 0$ |
| (8) $f(x) = \ln(x-2)/\lvert 2-x\rvert$ | $]2,+\infty[$ | $\lim\limits_{x\to 2^-} \ln(x-2)/\lvert 2-x\rvert$ pas de sens |
| (9) $f(x) = \ln(x^2-3x-4)/(x-4)$ | $]-\infty,-1[ \cup ]4,+\infty[$ | $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x^2-3x-4)/(x-4) = 0$ |
| (10) $f(x) = \big(\ln(\lvert 2-x\rvert) - \ln(x^2)\big)$ | $\mathbb{R}_0 \setminus \{2\}$ | $\lim\limits_{x\to +\infty} \big(\ln(\lvert 2-x\rvert) - \ln(x^2)\big) = -\infty$ |
| (11) $f(x) = (1+\cos(x))/\sin(x)$ | $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ | $\lim\limits_{x\to \pi} (1+\cos(x))/\sin(x) = 0$ |
| (12) $f(x) = (\tan(x) - \sin(x))/x^3$ | $\mathbb{R}_0 \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ | $\lim\limits_{x\to 0} (\tan(x) - \sin(x))/x^3 = \dfrac{1}{2}$ |
| (13) $f(x) = u^2/e^{3u}$ | $\mathbb{R}$ | $\lim\limits_{u\to +\infty} u^2/e^{3u} = 0^+$ |
| (14) $f(y) = y\,e^{-y^2}$ | $\mathbb{R}$ | $\lim\limits_{y\to -\infty} y\,e^{-y^2} = 0^-$ |
| (15 )$f(x) = \exp(x)/\sqrt{\exp(x^2)}$ | $\mathbb{R}$ | $\lim\limits_{x\to +\infty} \exp(x)/\sqrt{\exp(x^2)} = 0^+$ |

La limite $\lim\limits_{x\to 2^-} \ln(x-2)/\lvert 2-x\rvert$ n'a pas de sens car on peut trouver un intervalle ouvert comprenant 2 dont l'intersection avec dom$(f)\cap\ ]-\infty, 2[$ est vide.

# Liste 2 : décomposition de fractions rationnelles et approximations polynomiales

## I. Décomposition en fractions simples

1. **Décomposer les fractions rationnelles suivantes en fractions rationnelles simples à coefficients réels.**

$(a)\ \dfrac{1}{x^2-4x+4},\qquad (b)\ \dfrac{x}{-x^2+2x+3},\qquad (c)\ \dfrac{2}{x(x^2-4x+4),}\qquad (d)\ \dfrac{x^2+1}{3x+1}$

$(e)\ \dfrac{x^2-2}{x^2+2},\qquad (f)\ \dfrac{x^3}{x^3+1},\qquad (g)\ \dfrac{x}{x^2+1}$

On a les décompositions suivantes :

$(a)\ \dfrac{1}{(x-2)^2},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$

$(b)\ -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{x-3}+\dfrac{1}{x+1}\right),\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,\ 3\}$

$(c)\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{(x-2)^2}\right),\ x\in\mathbb{R}_0\setminus\{2\}$

$(d)\ \dfrac{3x-1}{9}+\dfrac{10}{9(3x+1)},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-1/3\}$

$(e)\ 1-\dfrac{4}{x^2+2},\quad x\in\mathbb{R}$

$(f)\ 1-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{x-2}{x^2-x+1}\right),\quad x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$(g)\ \dfrac{x}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$

## II. Approximations polynomiales

1. **Dans chacun des cas suivants, déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre $n$ en $x_0$ pour la fonction $f_k$. Représenter $f_2$ ( —-ou $f_3$ ou $f_5$— ) et ses approximations. Pour $f_5$,**
   **a) donner une expression explicite du reste de ces approximations.**
   **b) indiquer où se situe le graphique de $f_5$ au voisinage de $0$ par rapport à celui de chacune des approximations en tenant compte du point précédent.**

$f_1(x)=\cos(x)\,e^{3x},\ x_0=0, n=0,1,2,3$

$f_2(x)=\sqrt{1+9x},\ x_0=0, n=0,1,2$

$f_3(x)=1/(1-2x),\ x_0=0, n=0,1,2$

$f_4(x)=\arctan(x),\ x_0=0$ (resp. $x_0=1$), $n=0,1,2$

$f_5(x)=\cos^2(x),\ x_0=0,\ n=0,1,2$

$f_6(x)=\sin(x),\ x_0=1, n=0,1,2$

| Fonction | Ordre 0 | Ordre 1 | Ordre 2 |
|---|---|---|---|
| $f_1$ | $1$ | $1+3x$ | $1+3x+4x^2,\ x\in\mathbb{R}$ |
| $f_2$ | $1$ | $1+\dfrac{9x}{2}$ | $1+\dfrac{9x}{2}-\dfrac{81x^2}{8},\ x\in\mathbb{R}$ |
| $f_3$ | $1$ | $1+2x$ | $1+2x+4x^2,\ x\in\mathbb{R}$ |
| $f_4(x_0=0)$ | $0$ | $x$ | $x,\ x\in\mathbb{R}$ |
| $f_4(x_0=1)$ | $\dfrac{\pi}{4}$ | $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x-1}{2}$ | $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{(x-1)^2}{4},\ x\in\mathbb{R}$ |
| $f_5$ | $1$ | $1$ | $1-x^2,\ x\in\mathbb{R}$ |
| $f_6$ | $\sin(1)$ | $\sin(1)+\cos(1)(x-1)$ | $\sin(1)+\cos(1)(x-1)-\sin(1)(x-1)^2/2,\ x\in\mathbb{R}$ |

L'approximation à l'ordre 3 en 0 de $f_1$ est donnée par $P(x) = 1 + 3x + 4x^2 + 3x^3,\ x \in \mathbb{R}$.

a) Pour $f_5$, si on note $R_n$ le reste de l'approximation polynomiale de $f$ à l'ordre $n$ en 0, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $u_0$, $u_1$, $u_2$ compris entre 0 et $x$ tels que

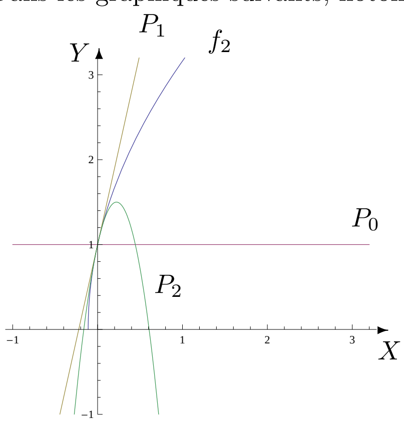
$$R_0(x) = -\sin(2u_0)x, \quad R_1(x) = -2\cos(2u_1).\frac{x^2}{2!} = -\cos(2u_1)x^2$$

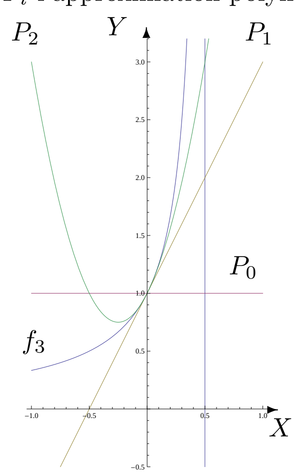
et

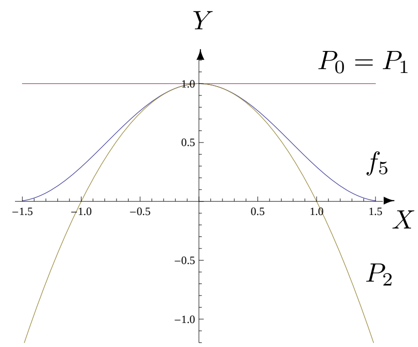
$$R_2(x) = 4\sin(2u_2).\frac{x^3}{3!} = \frac{2\sin(2u_2)\,x^3}{3}.$$

b) Lorsque $x$ est au voisinage de 0, $R_0(x)$ et $R_1(x)$ sont négatifs tandis que $R_2(x)$ est positif. Dès lors, le graphique de la fonction est situé en dessous de celui de $P_0$ et de celui de $P_1$ mais au-dessus de celui de $P_2$.

Dans les graphiques suivants, notons $P_i$ l'approximation polynomiale à l'ordre $i$.

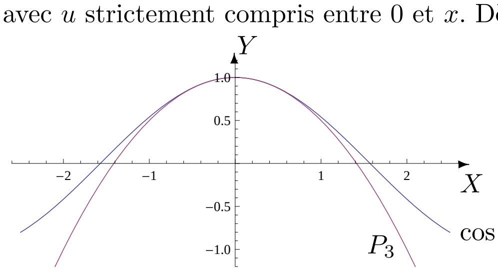



2. **Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 3 en 0 de la fonction cos et en estimer le reste. Représenter la fonction et cette approximation dans le même repère orthonormé.**

   L'approximation polynomiale à l'ordre 3 en 0 est donnée par $P(x) = 1 - \frac{x^2}{2},\ x \in \mathbb{R}$ et le reste vaut $R_3(x) = \dfrac{\cos(u)}{4!}x^4,\ x \in \mathbb{R}$ avec $u$ strictement compris entre 0 et $x$. Dès lors, on a $\quad |R_3(x)| \leq \dfrac{x^4}{24}$.




3. **La force de marée agissant sur une masse $m$ peut être définie comme la différence entre l'attraction de la Lune sur cette masse située à la surface de la Terre et l'attraction de la Lune sur cette masse en supposant qu'elle est au centre de la Terre. Si on désigne par $R$ le rayon terrestre, $d$ la distance[1] Terre-Lune, $G$ la constante de gravité, $M$ la masse de la Lune, on peut alors écrire**

$$F = \frac{GMm}{(d-R)^2} - \frac{GMm}{d^2}$$

1. entre les centres respectifs

**en un point de la surface terrestre situé sur la droite joignant le centre de la Terre et le centre de la Lune. En tenant compte du fait que le rapport $R/d$ est petit, une expression approximative (simplifiée) de la force $F$ est donnée par**

$$F^{Approx} = \frac{2GMmR}{d^3}.$$

**Expliquer pourquoi une approximation de $F$ est donnée par l'expression précédente.**

# Liste 3 : Calcul intégral à une variable sur un ensemble borné fermé et calcul d'aires

## I. Calcul d'intégrales sur un ensemble borné fermé

1. **Soit $a > 0$. Démontrer et interpréter graphiquement que**

   **(a) si $f$ est une fonction continue et paire sur $[-a, a]$, alors** $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$

   **(b) si $f$ est une fonction continue et impaire sur $[-a, a]$, alors** $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$

2. **Calculer les intégrales suivantes (si c'est possible)**

$$(1)\ \int_{-2}^{1}(x^2+2x)\ dx \qquad (2)\ \int_{-1}^{1} xe^x\ dx \qquad (3)\ \int_{-1}^{0} xe^{-x^2}\ dx$$

$$(4)\ \int_{1/2}^{3}\sqrt{3+\frac{x}{2}}\ dx \qquad (5)\ \int_{\pi/4}^{\pi/3}\sin^2(x)\ dx \qquad (6)\ \int_{\pi/4}^{\pi/3}\cot\text{an}^2(x)\ dx$$

$$(7)\ \int_{0}^{\pi} x\sin^2(x)\ dx \qquad (8)\ \int_{0}^{\pi/2}\cos(x)\sin^2(x)\ dx \qquad (9)\ \int_{-1}^{4}\frac{x+1}{x+2}\ dx$$

$$(10)\ \int_{-1}^{1}\arctan(x)\ dx \qquad (11)\ \int_{-2}^{2\sqrt{3}}\frac{1}{4+x^2}\ dx \qquad (12)\ \int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\ dx$$

| | |
|---|---|
| (1) $\displaystyle\int_{-2}^{1}(x^2+2x)\ dx = 0$ | (2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} xe^x\ dx = \frac{2}{e}$ |
| (3) $\displaystyle\int_{-1}^{0} xe^{-x^2}\ dx = \frac{1-e}{2e}$ | (4) $\displaystyle\int_{1/2}^{3}\sqrt{3+\frac{x}{2}}\ dx = 9\sqrt{2}-\frac{13\sqrt{13}}{6}$ |
| (5) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3}\sin^2(x)\ dx = \frac{\pi-3\sqrt{3}+6}{24}$ | (6) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3}\text{cotan}^2(x)\ dx = \frac{12-4\sqrt{3}-\pi}{12}$ |
| (7) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} x\sin^2(x)\ dx = \frac{\pi^2}{4}$ | (8) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\cos(x)\sin^2(x)\ dx = \frac{1}{3}$ |
| (9) $\displaystyle\int_{-1}^{4}\frac{x+1}{x+2}\ dx = 5-\ln(6)$ | (10) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\arctan(x)\ dx = 0$ |
| (11) $\displaystyle\int_{-2}^{2\sqrt{3}}\frac{1}{4+x^2}\ dx = \frac{7\pi}{24}$ | (12) $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\ dx = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ |

3. **En cartographie, sur une carte de Mercator, l'ordonnée d'un point proche de l'équateur et dont la latitude est $\varphi \in\ [0, \frac{\pi}{2}[$, est donnée par**

$$y(\varphi) = R\int_0^{\varphi}\frac{1}{\cos(u)}du.$$

   **Montrer que**

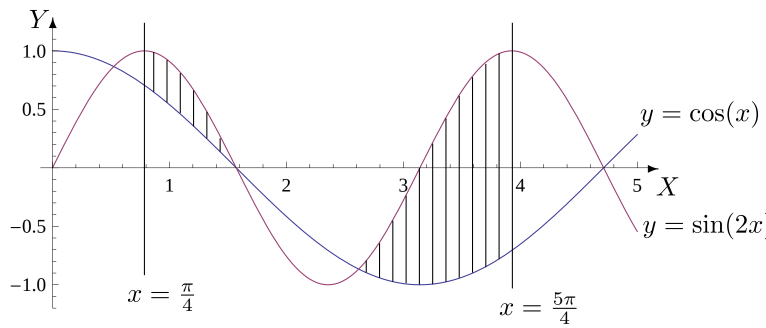
$$y(\varphi) = R\ \ln\left(\left|\tan\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right).$$

**II. Calcul d'aires**

1. **Calculer l'aire de la partie du plan dont une description analytique est la suivante**

$$\left\{(x,y) : x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right], y \in \mathbb{R} \text{ et } \cos(x) \leq y \leq \sin(2x)\right\}.$$

**Donner aussi une représentation graphique de cet ensemble.**

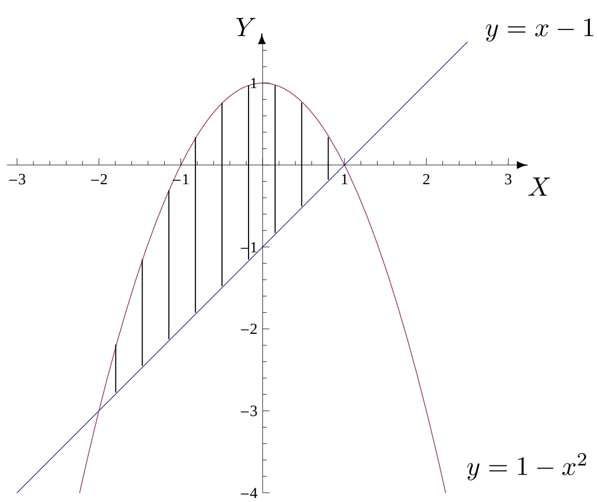



L'aire hachurée vaut $\sqrt{2} + \frac{1}{4}$.

2. **Calculer l'aire de la partie du plan dont une description analytique est la suivante**

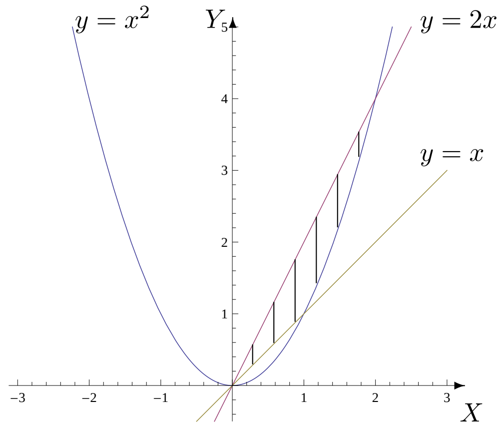
$$\left\{(x,y) : x \in [-2,1],\ y \in [x-1, 1-x^2]\right\}.$$

**Donner aussi une représentation graphique de cet ensemble.**




L'aire hachurée vaut $\frac{9}{2}$.

3. **On considère l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 2x,\ y \geq x^2\}$. Donner une représentation graphique de cet ensemble en le hachurant et calculer l'aire de cette région du plan.**
L'aire de la région hachurée vaut 7/6.


$y = x^2$
$Y$
$y = 2x$
$y = x$
$X$
5
4
3
2
1
−3
−2
−1
1
2
3

# Liste 4 : Calcul intégral à une variable sur un ensemble non borné fermé et nombres complexes

## I. Calcul d'intégrales sur un ensemble non borné fermé

1. **Calculer les intégrales suivantes (si c'est possible)**

| | | |
|---|---|---|
| (1) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\ dx$ | (2) $\displaystyle\int_{-1}^0 \ln(x^2)\ dx$ | (3) $\displaystyle\int_{-1}^e x\ln(\lvert x\rvert)\ dx$ |
| (4) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{9x^2+4}\ dx$ | (5) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{9x^2-4}\ dx$ | (6) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-2x+1}\ dx$ |
| (7) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+5}\ dx$ | (8) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^2+2x-3}\ dx$ | (9) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\pi/3} \cos(2x)\ e^x\ dx$ |
| (10) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\ e^{2x}\ dx$ | (11) $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\ dx$ | (12) $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{1}{x^2-4}\ dx$ |

| | |
|---|---|
| (1) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\ dx = \frac{10\sqrt{2}}{3}$ | (2) $\displaystyle\int_{-1}^0 \ln(x^2)\ dx = -2$ |
| (3) $\displaystyle\int_{-1}^e x\ln(\lvert x\rvert)\ dx = \frac{e^2+1}{4}$ | (4) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{9x^2+4}\ dx = \frac{\pi}{12}$ |
| (5) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{9x^2-4}\ dx = \frac{1}{12}\ln(2)$ | (6) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-2x+1}\ dx = 1$ |
| (7) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+5}\ dx = \frac{\pi}{8}$ | (8) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^2+2x-3}\ dx\ \ \nexists$ |
| (9) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\pi/3} \cos(2x)\ e^x\ dx = \frac{e^{\frac{\pi}{3}}(2\sqrt{3}-1)}{10}$ | (10) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\ e^{2x}\ dx\ \ \nexists$ |
| (11) $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\ dx = -1$ | (12) $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{1}{x^2-4}\ dx = \frac{1}{4}\ln(3)$ |

Pour l'intégrale (8), la fonction n'est pas intégrable en $-3$ et pour l'intégrale (10), elle n'est pas intégrable en $+\infty$.

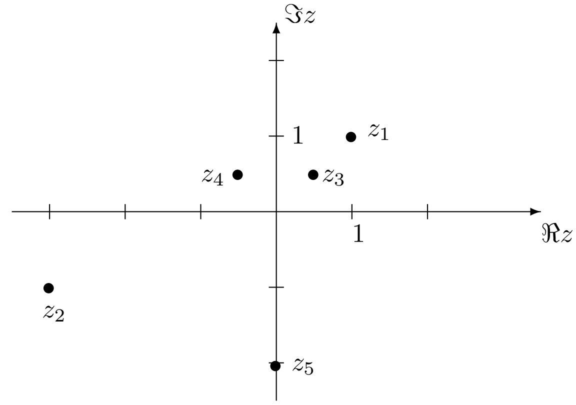
## II. Les nombres complexes

1. **Déterminer les partie réelle, imaginaire, le conjugué et le module de chacun des complexes ci-dessous. Représenter ces complexes dans le plan muni d'un repère orthonormé (« $X$ = axe réel » et « $Y$= axe imaginaire »)**

$$i+1, \quad (-i+1)(-1-2i), \quad \frac{1}{-i+1}, \quad \frac{i^7}{i-1}, \quad (1-i)^2.$$

On a

| $z$ | $\Re z$ | $\Im z$ | $\overline{z}$ | $\lvert z\rvert$ |
|---|---|---|---|---|
| $z_1 = i+1$ | $1$ | $1$ | $1-i$ | $\sqrt{2}$ |
| $z_2 = (-i+1)(-1-2i)$ | $-3$ | $-1$ | $-3+i$ | $\sqrt{10}$ |
| $z_3 = 1/(-i+1)$ | $1/2$ | $1/2$ | $(1-i)/2$ | $\sqrt{2}/2$ |
| $z_4 = i^7/(i-1)$ | $-1/2$ | $1/2$ | $(-1-i)/2$ | $\sqrt{2}/2$ |
| $z_5 = (1-i)^2$ | $0$ | $-2$ | $2i$ | $2$ |



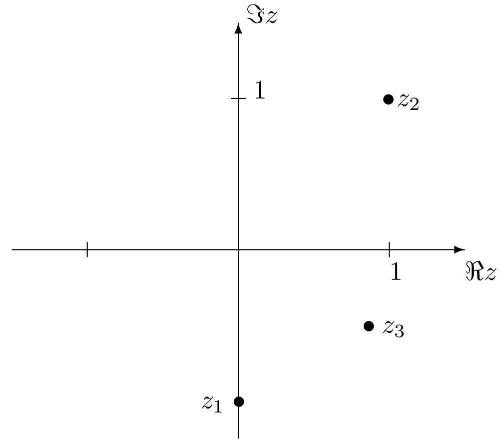

2. **Déterminer la forme trigonométrique des complexes suivants et les représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé (« $X$ = axe réel » et « $Y$= axe imaginaire »)**

$$-i, \quad i+1, \quad \frac{1}{2}(\sqrt{3}-i).$$

On a

$$z_1 = -i = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right), \quad z_2 = i+1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$z_3 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-i) = \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right).$$



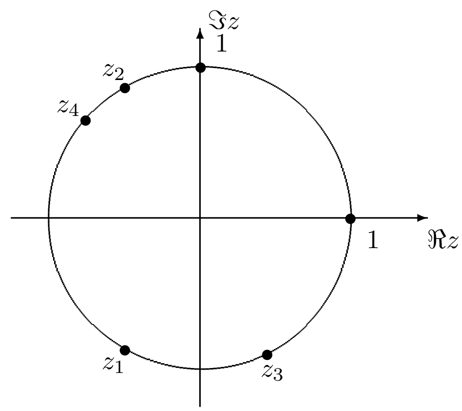

3. **On suppose que $\alpha$ est un nombre réel. Déterminer les partie réelle, imaginaire, le conjugué et le module de chacun des complexes ci-dessous. Représenter ces complexes**

**dans le plan muni d'un repère orthonormé (≪ $X$ = axe réel ≫ et ≪ $Y$= axe imaginaire ≫) en supposant que $\alpha$ appartient à l'intervalle $[\pi/2, \pi[$**

$$\cos(\alpha) - i\sin(\alpha), \quad \frac{1}{\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)}, \quad (\cos(1) + i\sin(1))(\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)), \quad \sin(2\alpha) - i\cos(2\alpha).$$

On a

| $z$ | $\Re z$ | $\Im z$ | $\overline{z}$ | $\|z\|$ |
|---|---|---|---|---|
| $z_1 = \cos(\alpha) - i\sin(\alpha)$ | $\cos(\alpha)$ | $-\sin(\alpha)$ | $\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$ | 1 |
| $z_2 = 1/(\cos(\alpha) - i\sin(\alpha))$ | $\cos(\alpha)$ | $\sin(\alpha)$ | $\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)$ | 1 |
| $z_3 = (\cos(1) + i\sin(1))(\cos(\alpha) - i\sin(\alpha))$ | $\cos(1-\alpha)$ | $\sin(1-\alpha)$ | $\cos(1-\alpha) - i\sin(1-\alpha)$ | 1 |
| $z_4 = \sin(2\alpha) - i\cos(2\alpha)$ | $\sin(2\alpha)$ | $-\cos(2\alpha)$ | $\sin(2\alpha) + i\cos(2\alpha)$ | 1 |



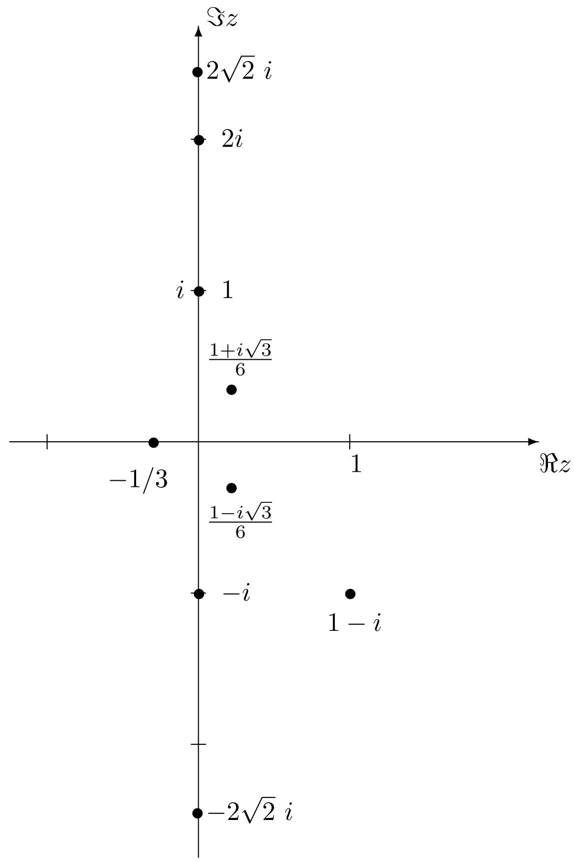

4. **Résoudre les équations suivantes et représenter les solutions dans le plan muni d'un repère orthonormé (≪ $X$ = axe réel ≫ et ≪ $Y$= axe imaginaire ≫)**

   (1) $z^2 + 8 = 0$ (2) $27z^3 + 1 = 0$ (3) $z^2 + 2 = iz$ (4) $z^2 - z + 1 + i = 0$ (5) $z^2 - (1-2i)z = 1 + i$

   L'ensemble des solutions de l'équation (1) est $S = \{-2\sqrt{2}\, i, 2\sqrt{2}\, i\}$.
   L'ensemble des solutions de l'équation (2) est

$$S = \left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\left(1 + i\sqrt{3}\right), \frac{1}{6}\left(1 - i\sqrt{3}\right)\right\}.$$

   L'ensemble des solutions de l'équation (3) est $S = \{-i, 2i\}$.
   L'ensemble des solutions de l'équation (4) est $S = \{1-i, i\}$.
   L'ensemble des solutions de l'équation (5) est $S = \{1-i, -i\}$.


$\Im z$
$2\sqrt{2}\ i$
$2i$
$i$
$1$
$\frac{1+i\sqrt{3}}{6}$
$-1/3$
$1$
$\Re z$
$\frac{1-i\sqrt{3}}{6}$
$-i$
$1-i$
$-2\sqrt{2}\ i$

# LISTE 5 : EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES (1)

## I. Quelques manipulations

1. **Si l'équation différentielle $(D_t y)^2 = 2y$ admet 2 solutions distinctes non nulles, peut-on affirmer qu'une combinaison linéaire de ces solutions est encore solution de cette équation ?**

   Cette équation n'est pas linéaire car une combinaison linéaire de solutions de cette équation n'est pas solution de l'équation. On a par exemple que la fonction $t \mapsto t^2/2$ est solution alors que la fonction $t \mapsto t^2$ ne l'est pas.

2. **Montrer que la fonction $g(t) = 3t^2 - 6t + 2,\ t \in \mathbb{R}$, vérifie le système** $\begin{cases} (D_t y)^2 = 12(y+1) \\ y(0) = 2 \\ y(2) = 2 \end{cases}$

   On a $g(0) = 2$ et $g(2) = 2$ ainsi que $Dg(t) = 6t - 6$. En remplaçant $Dy$ et $y$ respectivement par $Dg$ et $g$ dans le système, les trois équations sont vérifiées.

3. **Montrer que la fonction $g(t) = \operatorname{cotan}(t) - 1/\sin(t),\ t \in \,]0, \pi/2[$, vérifie l'équation $2\ Dy + y^2 = -1$.**

   On a $Dg(t) = (-1 + \cos(t))/\sin^2(t)$ et en remplaçant $Dy$ et $y$ respectivement par $Dg(t)$ et $g$ dans l'équation donnée, celle-ci est vérifiée.

4. **Montrer que la fonction $u : x \mapsto C_1\, e^{C_2 x},\ x \in \mathbb{R}$, $C_1$ et $C_2$ étant des constantes complexes arbitraires, vérifie l'équation différentielle $v(x)D^2v(x) - (Dv(x))^2 = 0$.**

   La fonction $u$ est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $Du(x) = C_1\, C_2\, e^{C_2 x}$ et $D^2u(x) = C_1\, (C_2)^2\, e^{C_2 x}$. En remplaçant dans l'équation donnée, on constate que cette dernière est vérifiée.

5. **Montrer que la fonction $x \mapsto \tan(x) + 1/\cos(x),\ x \in \,]0, \pi/2[\,$, vérifie l'équation $2Df - f^2 = 1$.**
   La fonction donnée est dérivable sur $]0, \pi/2[$ et on a

   $$D\left(\tan(x) + \frac{1}{\cos(x)}\right) = \frac{1}{\cos^2(x)} + \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)},\ x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

   Dès lors, il est facile de montrer que, pour tout $x \in \,]0, \pi/2[$, on a l'égalité.

## II. Résolution d'équations différentielles

1. **Résoudre les équations différentielles suivantes, en spécifiant dans quel intervalle on travaille**

   1) $4Df + 2if = 0$ 2) $D^2 f = 2f$ 3) $D^2 f = 0$

   4) $D^2 f + Df - 2f = 0$ 5) $4D^2 f - f = 0$ 6) $D^2 f + f = 0$

Les solutions des équations ci-dessus sont les fonctions suivantes

1) $f(x) = Ce^{-ix/2},\ x \in \mathbb{R}$ où $C$ est une constante arbitraire complexe.

2) $f(t) = C_1\, e^{-\sqrt{2}\,t} + C_2\, e^{\sqrt{2}\,t},\ t \in \mathbb{R}$ où $C_1$ et $C_2$ sont des constantes arbitraires complexes.

3) $f(u) = C_1 u + C_2,\ u \in \mathbb{R}$ où $C_1$ et $C_2$ sont des constantes arbitraires complexes.

4) $f(x) = C_1\, e^{-2x} + C_2\, e^{x},\ x \in \mathbb{R}$ où $C_1$ et $C_2$ sont des constantes arbitraires complexes.

5) $f(x) = C_1\, e^{-x/2} + C_2\, e^{x/2},\ x \in \mathbb{R}$ où $C_1$ et $C_2$ sont des constantes arbitraires complexes.

6) $f(x) = C_1\, e^{-ix} + C_2\, e^{ix},\ x \in \mathbb{R}$ où $C_1$ et $C_2$ sont des constantes arbitraires complexes.

2. **Résoudre les équations différentielles suivantes, en spécifiant dans quel intervalle on travaille (pour l'équation 3, en donner aussi les solutions réelles)**

| | |
|---|---|
| 1) $D^2f(x) + Df(x) - 2f(x) = e^x + 4x^2e^{2x} + 1$ | 2) $4D^2f(x) - f(x) = \cos^2(x) - 1/2$ |
| 3) $D^2f(x) + f(x) = x\, e^{2x}$ | 4) $D^2f(x) + 2Df(x) + f(x) = (2 + \cos(x))e^{-x}$ |
| 5 $D^2f(x) - f(x) = 1 + x^2$, | 6) $9D^2f(x) - Df(x) = 1$ |
| 7) $D^2f(x) - 4f(x) = 1 + e^{2x}$, | 8) $D^2f(x) + 4f(x) = \sin(4x)$ |
| 9) $Df(x) - 2f(x) = xe^{2x}$, | 10) $2Df(x) + 3f(x) = x^2 + 1$ |

Les solutions des équations ci-dessus sont les fonctions suivantes

1) $f(x) = C_1\, e^{-2x} + (C_2 + x/3)\, e^x + \left(x^2 - 5x/2 + 21/8\right) e^{2x} - 1/2,\ x \in \mathbb{R}$ où $C_1$ et $C_2$ sont des constantes arbitraires complexes.

2) $f(x) = C_1\, e^{-\frac{x}{2}} + C_2\, e^{\frac{x}{2}} - \cos(2x)/34,\ x \in \mathbb{R}$ où $C_1$ et $C_2$ sont des constantes arbitraires complexes.

3) $f(x) = C_1\, e^{-ix} + C_2\, e^{ix} + (x/5 - 4/25)\, e^{2x},\ x \in \mathbb{R}$ où $C_1$ et $C_2$ sont des constantes arbitraires complexes.
Les solutions réelles sont données par

$$f(x) = C_1'\, \cos(x) + C_2'\, \sin(x) + (x/5 - 4/25)\, e^{2x},\ x \in \mathbb{R}$$

où $C_1'$ et $C_2'$ sont des constantes arbitraires réelles.

4) $f(x) = (C_1x + C_2 + x^2 - \cos(x))e^{-x},\ x \in \mathbb{R}$ où $C_1$ et $C_2$ sont des constantes arbitraires complexes.

5) $f(x) = c_1\, e^{-x} + c_2\, e^x - x^2 - 3,\ x \in \mathbb{R}$ où $c_1, c_2$ sont des constantes complexes arbitraires.

6) $f(x) = c_1 + c_2e^{x/9} - x,\ x \in \mathbb{R}$ où $c_1, c_2$ sont des constantes complexes arbitraires.

7) $f(x) = c_1\, e^{-2x} + (c_2 + x/4)\ e^{2x} - 1/4,\ x \in \mathbb{R}$ où $c_1, c_2$ sont des constantes complexes arbitraires.

8) $f(x) = c_1\, e^{-2ix} + c_2\, e^{2ix} - \sin(4x)/12,\ x \in \mathbb{R}$ où $c_1, c_2$ sont des constantes complexes arbitraires.

9) $f(x) = \left(C + x^2/2\right) e^{2x},\ x \in \mathbb{R}$ où $C$ est une constante complexe arbitraire.

10) $f(x) = Ce^{-3x/2} + x^2/3 - 4x/9 + 17/27,\ x \in \mathbb{R}$ où $C$ est une constante complexe arbitraire.

3. **Résoudre le système suivant, en spécifiant dans quel intervalle on travaille**

$$\left\{\begin{array}{l} 4D^2f(x) + f(x) = x^2 + x + 2 \\ f(0) = 0 \\ Df(0) = 2. \end{array}\right.$$

La solution du système est la fonction

$$f(x) = 6\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) + x^2 + x - 6,\ x \in \mathbb{R}.$$

4. **Résoudre l'équation différentielle suivante en précisant l'intervalle sur lequel on travaille.**

$$2D^2f(x) + Df(x) = 2x$$

**Déterminer ensuite la solution qui vaut $1$ en $1$ et dont la dérivée première vaut $0$ en $1$.**

Les solutions de cette équation sont les fonctions

$$f(x) = C_1 + C_2\, e^{-x/2} + x^2 - 4x,\ x \in \mathbb{R}$$

où $C_1$ et $C_2$ sont des constantes arbitraires complexes.
La solution qui vaut 1 en 1 et dont la dérivée première vaut 0 en 1 est la fonction

$$f(x) = 8 - 4\, e^{(1-x)/2} + x^2 - 4x,\ x \in \mathbb{R}.$$

# Liste 6 : Equations différentielles (2) et Calcul matriciel (1)

## I. Equations différentielles : divers

1. **Dans certaines conditions, la température de surface $y(t)$ d'un objet change au cours du temps selon un ≪ taux ≫ proportionnel à la différence entre la température de l'objet et celle du milieu ambiant, que l'on suppose constante et que l'on note $y_0$. On obtient ainsi l'équation différentielle**

$$Dy(t) = k(y(t) - y_0)$$

   **où $k$ est une constante strictement négative. Cette équation est appelée ≪ Newton's law of cooling ≫ et elle est utilisée notamment pour déterminer le temps entre la mort d'un individu et la découverte de son corps.**
   **Résoudre cette équation et montrer alors que la température de l'objet se rapproche de la température ambiante au fur et à mesure que le temps passe.**

   Les solutions de cette équation sont les fonctions $y(t) = C\,e^{kt} + y_0,\ t \in \mathbb{R}$ où $C$ est une constante arbitraire réelle.
   Comme $k < 0$, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = y_0$.

2. **Depuis un recensement de la population d'un pays, on constate que la vitesse d'accroissement de la population est, à tout instant, proportionnelle au nombre d'habitants à cet instant. Après combien de temps depuis ce recensement, cette population sera-t-elle triple sachant qu'elle a doublé en 50 ans ?**

   La population aura triplé depuis le recencement après $\dfrac{50\ln(3)}{\ln(2)} \approx 79,248$ ans donc environ 79 ans.

3. **La vitesse initiale d'une balle roulant sur un sol horizontal est de 10 m/s. Vu les frottements, la vitesse décroît avec un taux constant de 2 m/s$^2$. Quand la balle sera arrêtée, quelle distance aura-t-elle parcourue depuis son point de départ ?**

   Quand la balle sera arrêtée, elle aura parcouru une distance de 25 m.

4. **Déterminer la valeur de la constante $c$ de telle sorte que la fonction $f(x) = 3x^2,\ x \in \mathbb{R}$ soit une solution de l'équation différentielle**

$$c\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\frac{dy}{dx} - y = 0$$

   La constante vaut $-1/12$.

5. **Soit $L$ la longueur d'un pendule et soit $T$ sa période d'oscillation. Si les oscillations sont petites et si le pendule n'est soumis à aucune force autre que la gravité, alors un modèle liant $T$ et $L$ est l'équation différentielle**

$$\frac{dT}{dL} = \frac{T}{2L}.$$

   **Montrer que cela implique que la période $T$ est proportionnelle à la racine carrée de la longueur $L$.**

   Les solutions de cette équation sont les fonctions $T(L) = C\sqrt{L},\ L \in ]0,+\infty[$ où $C$ est une constante arbitraire strictement positive.
   La période $T$ est donc bien proportionnelle à la racine carrée de la longueur $L$.

**II. Opérations entre matrices**

1. **Soient les matrices $A$, $B$, $C$ données par**

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & i \\ 1+i & -1 \\ 3/i & (2-i)^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ i & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1/(i+1) \\ -2i & i/2 \end{pmatrix}.$$

**Si possible, effectuer les opérations suivantes (et simplifier la réponse au maximum). Si cela ne l'est pas, en expliquer la raison.**

$$1)\ A+B,\ 2)\ A+\widetilde{B},\ 3)\ AB,\ 4)\ AB+C,\ 5)\ BA,\ 6)\ C\widetilde{A},\ 7)\ A^*C,\ 8)\ iC,\ 9)\ (iA)^*.$$

1) $A+B$ est impossible à calculer car les matrices n'ont pas le même format.

2) $A+\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2+i & -2i \\ i & 3 & 1-4i \end{pmatrix}$

3) $AB = \begin{pmatrix} 8+i & 4+10i \\ 3+5i & -10+8i \end{pmatrix}$

4) $AB+C = \begin{pmatrix} 11+i & (9+19i)/2 \\ 3+3i & (-20+17i)/2 \end{pmatrix}$

5) $BA = \begin{pmatrix} 4 & 2+2i & -6i \\ 2+4i & -3+i & 12-19i \\ 0 & 1+i & -3+8i \end{pmatrix}$

6) $C\widetilde{A}$ est impossible à calculer car le nombre de colonnes (2) de $C$ n'est pas égal au nombre de lignes (3) de $\widetilde{A}$.

7) $A^*C = \begin{pmatrix} 4 & 3/2-i \\ 3-i & -3i/2 \\ 8+3i & (-1+6i)/2 \end{pmatrix}$

8) $iC = \begin{pmatrix} 3i & (1+i)/2 \\ 2 & -1/2 \end{pmatrix}$

9) $(iA)^* = \begin{pmatrix} -2i & -1 \\ -1-i & i \\ 3 & 4-3i \end{pmatrix}$

2. **Soit $A$ une matrice carrée de dimension 3 telle que $A_{ij} = 1$, $\forall i, j$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.**

   **Calculer $C = AB - BA$ et en déduire la forme de $\widetilde{C} + C$.**

   On a $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\widetilde{C} + C$ est la matrice nulle de dimension 3.

3. **Montrer que $A^2 - 2A + 3\ \mathbb{1} = 0$ avec**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. **Déterminer la forme générale des matrices qui commutent avec la matrice**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

   La forme générale des matrices qui commutent avec $A$ est du type $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{C})$.

# Liste 7 : Calcul matriciel (2)

## I. Déterminants

1. **Calculer le plus rapidement possible le déterminant de chacune des matrices suivantes.**

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2-i & 3i \\ -1 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ (i+1)^2 & 5 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -6 \end{pmatrix}\ D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de $A$ vaut $(8-i)/9$, celui de $B$ vaut 1, celui de $C$ vaut 90 et celui de $D$ vaut $-7/2$.

2. **Le déterminant de chacune des matrices suivantes est un polynôme en $x \in \mathbb{C}$. Factoriser ce polynôme en un produit de facteurs du premier degré.**

$$A = \begin{pmatrix} 1-x & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2-x \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} i & x+2 \\ -x & -i \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} x & -4 \\ 1 & x \end{pmatrix}.\ D = \begin{pmatrix} x & 0 & 3 \\ 0 & x+1 & x \\ 1 & 0 & x-2 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de $A$ est égal à $\left(x - \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \dfrac{3-\sqrt{13}}{2}\right)$ ; celui de $B$ est égal à $(x+1)^2$, celui de $C$ vaut $(x+2i)(x-2i)$ et celui de $D$ $(x+1)^2(x-3)$.

## II. Inversion de matrices

**Calculer (si elle existe) la matrice inverse de chacune des matrices suivantes (on donne $\alpha \in \mathbb{R}$).**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \\ \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- L'inverse de $A$ est $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- La matrice $B$ ne possède pas d'inverse car son déterminant est nul.
- La matrice $C$ est égale à son inverse.
- L'inverse de $D$ est $\frac{1+i}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ i & i & 1 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

## III. Valeurs et vecteurs propres, diagonalisation

1. **Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes et en donner la multiplicité.**

$$A = \begin{pmatrix} i & -i \\ i & i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice $A$ sont $-1+i$ et $1+i$ ; ces valeurs propres sont simples (de multiplicité 1).
Les valeurs propres de la matrice $B$ sont 2 (valeur propre double) et 3 (valeur propre simple).
Les valeurs propres de la matrice $C$ sont $-4,\ 1$ et $3$ ; ces valeurs propres sont simples.

2. **Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes. Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Pourquoi ? Si elles le sont, en déterminer une forme diagonale $\Delta$, ainsi qu'une matrice inversible $S$ qui y conduit.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Calculer les produits $AS$ et $S\Delta$. Comparer les matrices obtenues. N'aurait-on pas pu prévoir ce resultat sans effectuer les calculs ? Pourquoi ?**

• Matrice $A$ : 2 valeurs propres simples : $-2$ et $5$ ; la matrice est donc diagonalisable.
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre $-2$ sont du type $c \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$ et ceux relatifs à la valeur propre 5 sont du type $c' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c' \in \mathbb{C}_0$.
On a, par exemple, $\Delta = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ avec $S = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ si on note $A$ la matrice donnée.
Dès lors, en effectuant les produits, on a $AS = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} = S\Delta$. Comme $A$ est diagonalisable, on a $\Delta = S^{-1}AS \Leftrightarrow S\Delta = AS$ en multipliant les deux membres à gauche par $S$.

• Matrice $B$ : 2 valeurs propres, l'une simple 1 et l'autre double $-1$.
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre double $-1$ sont du type $c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$. Comme cette valeur propre n'engendre pas 2 vecteurs non multiples l'un de l'autre, la matrice n'est pas diagonalisable.
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre simple 1 sont du type $c' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c' \in \mathbb{C}_0$.

• Matrice $C$ : 2 valeurs propres, l'une simple 1 et l'autre double $-1$.
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre double $-1$ sont du type $c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ non simultanément nuls. Cette matrice est donc diagonalisable car les vecteurs $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas multiples l'un de l'autre.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre simple 1 sont du type $c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.

On a, par exemple, $S^{-1}CS = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $S = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ si on note $C$ la matrice donnée.

3. **Une matrice carrée $A$ de dimension 2 possède les deux valeurs propres 1 et -1, auxquelles peuvent être associés respectivement les vecteurs propres**

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \textbf{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**Que vaut $A$ ?**

La matrice $A$ est égale à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

# Liste 8 : Calcul matriciel (3)

## I. Matrices de Leslie et matrices stochastiques

1. **Les baleines bleues sont une espèce de mammifères en voie d'extinction à cause notamment de non respect de règles de pêche. Tous les 20 ans, des chercheurs recensent leur population (une estimation bien sûr) et font la répartition entre le nombre de baleines femelles de moins de 20 ans (les « jeunes ») et celui des baleines femelles de strictement plus de 20 ans (les « vieilles »). Ils ont trouvé le moyen de marquer les deux catégories de telle sorte que l'on puisse reconnaître les jeunes nés d'une mère de moins de 20 ans et ceux nés d'une mère de plus de 20 ans. Le comptage des baleines femelles actuellement donne les résultats suivants : $1/3$ des baleines femelles « jeunes » ont donné naissance à un petit (survivant) et $5/8$ des baleines « vieilles » l'ont fait. De plus, seulement $1/6$ des baleines « jeunes » et seulement la moitié des baleines « vieilles » ont survécu.**
**On suppose que les paramètres sont valables à grande échelle de temps...**
**(a) Ecrire le système d'équations modélisant l'évolution des deux catégories de baleines, en spécifiant la matrice de Leslie correspondante.**
**(b) Comment va évoluer la population ?**
**(c) Pourquoi peut-on dire que l'espèce est en voie d'extinction ?**

(a) Soient $x(n)$ le nombre de baleines femelles « jeunes » et $y(n)$ celui des baleines femelles « vieilles » lors du comptage numéro $n$. On a le système :

$$\begin{pmatrix} x(n+1) \\ y(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 5/8 \\ 1/6 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(n) \\ y(n) \end{pmatrix}.$$

La matrice de Leslie

$$L = \begin{pmatrix} 1/3 & 5/8 \\ 1/6 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

est régulière.
(b) Les valeurs propres de $L$ sont $3/4$ et $1/12$ et les vecteurs propres de valeur propre $3/4$ sont

$$c \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

avec $c \in \mathbb{C}_0$.
Vu le théorème de Perron-Frobenius, le nombre de baleines de chaque catégorie, de même que le total évolue selon

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x(n+1)}{x(n)} = 3/4 \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{y(n+1)}{y(n)} = 3/4 \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{x(n+1)+y(n+1)}{x(n)+y(n)} = 1.$$

La répartition de la population selon les deux catégories évolue vers la répartition $3/5$, $2/5$.
(c) Comme $3/4 < 1$, la population est donc en voie d'extinction.

2. **L'institut météorologique a fait les observations suivantes :**
— **on n'a jamais vu deux jours ensoleillés consécutifs,**
— **s'il fait beau un jour donné, on a une chance égale d'avoir de la pluie ou de la neige le lendemain,**
— **s'il pleut ou s'il neige, on a une chance sur deux que le temps se maintienne le jour suivant et une chance sur quatre qu'il fasse beau le lendemain.**
**Sachant cela,**
(a) **Représenter la matrice de transition de ce système.**

(b) **Sachant qu'il fait beau aujourd'hui, quel pourcentage de chance a-t-on qu'il fasse beau dans deux jours ?**

(c) **A long terme, quelle sera l'évolution du climat ?**

(a) Si on note $N_0$, $P_0$ et $S_0$ respectivement un jour de neige, un jour de pluie et un jour de soleil au départ et $N_1$, $P_1$ et $S_1$ la météo correspondante le jour suivant, on a

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ P_1 \\ S_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_0 \\ P_0 \\ S_0 \end{pmatrix}$$

et la matrice de dimension 3 est la matrice de transition du système.
(b) Sachant qu'il fait beau aujourd'hui, on a 25 % de chance qu'il fasse beau dans 2 jours.
(c) Le vecteur de probabilité de valeur propre 1 est égal à $\begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,4 \\ 0,2 \end{pmatrix}$. A long terme, on 4 chances sur 10 qu'il neige ou qu'il pleuve et 2 chances sur 10 qu'il fasse ensoleillé.

3. **Dans un laboratoire, à chaque repas, des lapins ont le choix entre manger des carottes, de la salade ou des pissenlits mais ne peuvent manger qu'un aliment d'une seule catégorie lors d'un même repas. Comme ils sont gourmands, ils ne manquent jamais un repas.**
**L'observation montre que si un lapin a mangé des carottes à un repas, il en mangera au repas suivant dans 70 % des cas ; sinon, il mangera de la salade une fois sur 5 ou des pissenlits 1 fois sur 10.**
**S'il a mangé de la salade, il en mangera encore 6 fois sur 10 au repas suivant ; sinon, il mangera un des deux autres aliments de façon équiprobable.**
**Enfin, s'il a mangé des pissenlits, au repas suivant il y a 1 chance sur 5 qu'il mange des carottes et 2 chances sur 5 de la salade.**
   (a) **Si un lapin vient de manger des carottes, quelle est la probabilité qu'il mange de la salade dans deux repas ?**
   (b) **A longue échéance, que mange ce lapin ?**

   (a) La probabilité pour que le lapin mange de la salade dans 2 repas vaut $0,3$.
   (b) A longue échéance, le lapin mange des carottes ou de la salade avec une probabilité de $2/5$, des pissenlits avec une probabilité de $1/5$.

4. **Un individu vit dans un milieu où il est susceptible d'attrapper une maladie par piqûre d'insecte. Il peut être dans l'un des trois états suivants : immunisé ($I$), malade ($M$), non malade et non immunisé ($S$). D'un mois à l'autre, son état peut changer selon les règles suivantes :**
   - **étant immunisé, il peut le rester avec une probabilité $0,9$ ou passer à l'état $S$ avec une probabilité $0,1$ ;**
   - **étant dans l'état $S$, il peut le rester avec une probabilité $0,5$ ou passer à l'état $M$ avec une probabilité $0,1$ ;**
   - **étant malade, il peut le rester avec une probabilité $0,2$ ou passer à l'état $S$ avec une probabilité $0,8$.**

   **Déterminer**
   **a) la matrice de transition du système ;**
   **b) la probabilité qu'un individu immunisé soit encore immunisé après deux mois ;**
   **c) la probabilité qu'à long terme, un individu soit immunisé.**

   (a) Notons respectivement $I_0, M_0$ et $S_0$ les probabilités qu'un individu soit immunisé, malade, non malade et non immunisé un jour donné. Le mois suivant, ces probabilités sont respectivement données par

$$\left\{\begin{array}{lcl} I_1 & = & 0,9\,I_0+0,4\,S_0+0\,M_0 \\ S_1 & = & 0,1\,I_0+0,5\,S_0+0,8\,M_0 \\ M_1 & = & 0\,I_0+0,1\,S_0+0,2\,M_0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} I_1 \\ S_1 \\ M_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 & 0 \\ 0,1 & 0,5 & 0,8 \\ 0 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}}_{:=T} \begin{pmatrix} I_0 \\ S_0 \\ M_0 \end{pmatrix}.$$

Donc, la matrice de transition du système est donnée par la matrice $T$.

(b) Si un individu est immunisé un jour donné, la probabilité qu'il soit immunisé deux mois plus tard est de 85%.

(c) A long terme, la probabilité qu'un individu soit immunisé est donnée par $\frac{32}{41}$, c'est-à-dire environ 78%.

5. **Un biologiste étudie le passage d'une molécule de phosphore dans un écosystème. Celle-ci peut se trouver dans le sol, dans l'herbe, dans le bétail ou peut disparaître de l'écosystème. D'une heure à l'autre, le transfert peut s'effectuer selon les modalités suivantes :**
   - **étant dans le sol, la molécule a 3 chances sur 5 d'y rester, 3 chances sur 10 de passer dans l'herbe et 1 chance sur 10 de disparaître ;**
   - **étant dans l'herbe, elle a 1 chance sur 10 de revenir dans le sol, 2 chances sur 5 de rester dans l'herbe et 1 chance sur 2 de se retrouver dans le bétail ;**
   - **étant dans le bétail, elle a 3 chances sur 4 de retourner dans le sol, 1 chance sur 5 de rester dans le bétail et 1 chance sur 20 de disparaître ;**
   - **si la molécule disparaît, elle ne réapparaît plus nulle part.**

   **Déterminer la matrice de transition du système.**

   Notons respectivement $S_0, H_0, B_0$ et $D_0$ les probabilités qu'une molécule de phosphore se trouve dans le sol, dans l'herbe, dans le bétail et disparaisse à une heure donnée. L'heure suivante, ces probabilités sont respectivement données par

$$\left\{\begin{array}{lcl} S_1 & = & 3S_0/5+H_0/10+3B_0/4+0D_0 \\ H_1 & = & 3S_0/10+2H_0/5+0B_0+0D_0 \\ B_1 & = & 0S_0+H_0/2+B_0/5+0D_0 \\ D_1 & = & S_0/10+0H_0+B_0/20+1D_0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} S_1 \\ H_1 \\ B_1 \\ D_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3/5 & 1/10 & 3/4 & 0 \\ 3/10 & 2/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/5 & 0 \\ 1/10 & 0 & 1/20 & 1 \end{pmatrix}}_{:=T} \begin{pmatrix} S_0 \\ H_0 \\ B_0 \\ D_0 \end{pmatrix}.$$

   Donc, la matrice de transition du système est donnée par la matrice $T$.

6. **Depuis des mois, un laborantin de l'ile de Rêve travaille sur une substance, appelée KillCovid, très prometteuse pour la découverte d'un médicament qui permettrait de détruire le virus responsable de la maladie Covid. Le KillCovid n'a malheureusement qu'une durée de vie de deux mois.**

   **Le laborantin a trouvé le moyen de se servir de ce KillCovid comme catalyseur pour en produire du nouveau, à partir d'autres substances communes tenues secrètes. Il récupère donc le KillCovid utilisé à la fin du processus. Chaque mois, en utilisant 1 dose de KillCovid d'un mois, il produit 1/2 dose de nouveau KillCovid et la proportion est la même avec le KillCovid de deux mois.**

   **(a) Ecrire le système d'équations modélisant l'évolution du stock de KillCovid (stock âgé d'un mois et stock âgé de deux mois), en spécifiant la matrice de Leslie correspondante.**

   **(b) Comment va évoluer le stock de KillCovid ?**

(a) Soient $x(n)$ le nombre de doses de KillCovid d'un mois et $y(n)$ celui de deux mois au mois numéro $n$. On a le système :

$$\begin{pmatrix} x(n+1) \\ y(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(n) \\ y(n) \end{pmatrix}.$$

La matrice de Leslie

$$L = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est régulière (les éléments de $L^2$ sont strictement positifs).
(b) Les valeurs propres de $L$ sont 1 et $-1/2$ et les vecteurs propres de valeur propre 1 sont

$$c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec $c \in \mathbb{C}_0$.
Vu le théorème de Perron-Frobenius, le nombre de doses a tendance à se stabiliser de même que le total car

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x(n+1)}{x(n)} = 1 \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{y(n+1)}{y(n)} = 1 \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{x(n+1)+y(n+1)}{x(n)+y(n)} = 1.$$

7. **Par cycle de trois ans, un gestionnaire financier s'occupe du portefeuille d'actions d'une entreprise. Ce portefeuille comprend des actions qui viennent d'être achetées, d'autres qui ont été achetées un an auparavant et enfin d'autres qui sont dans le portefeuille depuis deux ans.**
**Le prix de chaque action venant d'être achetée augmente tellement qu'au début de la deuxième année on peut en acheter 6 nouvelles et au début de la troisième 10 nouvelles.**
**En même temps, au cours de la première année, il revend la moitié de ses actions pour investir dans l'entreprise et, au cours de la deuxième année, il ne conserve que 40 % des actions possédées à ce moment et revend les autres pour la même raison.**
**(a) Ecrire le système d'équations modélisant l'évolution de cette répartition des actions selon leur durée de placement (un an, deux ans, trois ans) en indiquant quelle est la matrice de Leslie de celle-ci.**
**(b) Comment va évoluer la composition du portefeuille ?**
**(c) Quelle est la répartition idéale qui permet de doubler chaque nombre d'actions de chaque type sur un an ?**

(a) On désigne par $x_1, x_2, x_3$ le nombre d'actions placées respectivement depuis un an, deux ans, trois ans. L'année suivante, la répartition des actions sera de $6x_2 + 10x_3$ actions placées depuis un an, $x_1/2$ actions placées depuis deux ans et $2x_2/5$ actions placées depuis trois ans. Si on note $x_1(n), x_2(n), x_3(n)$ la répartition l'année $n$, cela donne le système

$$\begin{pmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \\ x_3(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \end{pmatrix}.$$

La matrice de Leslie

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 \end{pmatrix}$$

est régulière (les éléments de $L^5$ sont strictement positifs).
(b) Les valeurs propres de $L$ sont 2 et $-1$ et les vecteurs propres de valeur propre 2 sont

$$c \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec $c \in \mathbb{C}_0$.
Vu le théorème de Perron-Frobenius, le nombre d'actions de chaque type a tendance à doubler chaque année, de même que le total de toutes celles-ci car

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_k(n+1)}{x_k(n)} = 2 \ \forall k = 1,2,3, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{x_1(n+1)+x_2(n+1)+x_3(n+1)}{x_1(n)+x_2(n)+x_3(n)} = 2$$

(c) Les proportions de chaque type d'action dans le portefeuille se rapprochent de $20/26, 5/26, 1/26$.

**II. Divers**

1. **En algèbre linéaire (ou géométrie analytique), une rotation du plan (d'angle $\theta$) est représentée par une matrice du type**

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

**où $\theta$ est un réel (et représente la mesure de l'angle de la rotation).**

— **Pour tout $\theta$, déterminer la matrice produit $M_\theta^2$ et en simplifier les éléments au maximum.**
On a
$$M_\theta^2 = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

— **Montrer que quels que soient $\theta, \theta'$, les matrices $M_\theta$ et $M_{\theta'}$ commutent. Qu'est-ce que cela signifie en termes de rotations ?**
On a
$$M_\theta M_{\theta'} = M_{\theta'} M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix}$$
ce qui signifie que l'ordre dans lequel on effectue les rotations n'a pas d'importance.

— **Montrer que quel que soit le réel $\theta$, la matrice**
$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$
**est aussi une matrice qui représente une rotation.**

On a
$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}.$$
C'est donc aussi une matrice de rotation mais la rotation s'effectue dans le sens inverse de la rotation d'angle $\theta$.

2. **Vrai ou faux (Justifier)**

(a) **Toute matrice carrée de dimension 3 commute avec $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.**

Faux : si on multiplie la matrice donnée notée $A$ à gauche et à droite par une matrice quelconque notée $B$, par exemple $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a notamment que la troisième ligne de $AB$ est le vecteur nul alors que la troisième ligne de $BA$ a pour premier élément 3.

(b) **La matrice**
$$\begin{pmatrix} a-b & a^2-ab+b^2 \\ a^2-b^2 & a^3-b^3 \end{pmatrix} \ (a, b \in \mathbb{C})$$

**est toujours inversible.**
Faux car le déterminant de cette matrice vaut 0 si $a = b$ ou si $b = 0$.

(c) **Si une matrice carrée $A$ de dimension 2 est de déterminant nul, alors l'une des colonnes de $A$ est multiple de l'autre.**
Vrai (cf. théorie).

(d) **Si deux lignes d'une matrice carrée $A$ de dimension 3 sont identiques, alors $\det A = 0$.**
Vrai (cf. théorie).

(e) **Si $A$ est une matrice carrée de dimension 3, alors $\det(5A) = 5\det(A)$.**
Faux : $\det(5A) = 5^3 \det(A) = 125\det(A)$.

(f) **Si $B$ est la matrice obtenue en multipliant la ligne 3 d'une matrice carrée $A$ de dimension 3 par 5, alors $\det(B) = 5\det(A)$.**
Vrai (cf. théorie).

(g) **Si $X$ est un vecteur propre de la matrice $2A$ alors c'est aussi un vecteur propre de $A$.**
Vrai car si $X \neq 0$ est tel que $2AX = \lambda X$ alors on a $AX = (\lambda/2)X$.

(h) **Si $\lambda$ est une valeur propre de $A$ alors $\lambda^2$ est valeur propre de $A^2$.**
Vrai car si $X \neq 0$ est tel que $AX = \lambda X$ alors on a $A^2X = A(AX) = A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda^2 X$.

(i) **0 peut être valeur propre d'une matrice inversible.**
Faux car comme $A$ est inversible, on a $\det(A) \neq 0$. Si $\lambda = 0$ alors $\det(A-\lambda X) = 0 \Leftrightarrow \det(A) = 0$ ce qui est absurde puisque $\det(A) \neq 0$.
Autre justification possible : si $X \neq 0$ est tel que $AX = 0X = 0$ et que $A^{-1}$ existe alors $A^{-1}\ AX = A^{-1}\ 0 \Leftrightarrow X = 0$ ce qui est absurde puisque $X \neq 0$.

(j) **Si $A$ est inversible, tout vecteur propre de $A$ est aussi vecteur propre de son inverse.**
Vrai car si le vecteur $X$ non nul est tel que $AX = \lambda X$ et si $A^{-1}$ existe alors on a $A^{-1}(AX) = \lambda A^{-1}X \Leftrightarrow X = \lambda A^{-1}X$. Comme $A$ est inversible, son déterminant n'est pas nul. Or $\det(A)$ est la valeur en 0 du polynôme caractéristique $\det(A - \lambda\mathbb{1})$. Donc 0 n'est pas valeur propre de $A$ c'est-à-dire $\lambda \neq 0$ et on a $X = \lambda A^{-1}X \Leftrightarrow A^{-1}X = (1/\lambda)X$.

(k) **Le carré d'une matrice est une matrice qui possède au moins un élément non nul.**
Faux car le carré de la matrice nulle est la matrice nulle.

(l) **Si $A$ est diagonalisable, alors sa transposée l'est aussi.**
Vrai car si $S$ est inversible tel que $S^{-1}AS = \Delta$ ($\Delta$ matrice diagonale) alors les transposées des deux membres sont des matrices égales et on a $\widetilde{S}\ \widetilde{A}\ \widetilde{S^{-1}} = \widetilde{\Delta} = \Delta \Leftrightarrow (\widetilde{S^{-1}})^{-1}\ \widetilde{A}\ \widetilde{S^{-1}} = \Delta$
$\Leftrightarrow T^{-1}\ \widetilde{A}\ T = \Delta$ si on pose $T = \widetilde{S^{-1}}$.

(m) **Si $A$ est diagonalisable et inversible, alors l'inverse est aussi diagonalisable.**
Vrai car si $A^{-1}$ existe et si $S$ inversible est tel que $S^{-1}AS = \Delta$ ($\Delta$ matrice diagonale), comme $\det(S^{-1}AS) = \det(A) \neq 0$ ($A$ est inversible) et $\det(A) = \det(\Delta)$ alors $\Delta$ est inversible et on a $(S^{-1}AS)^{-1} = \Delta^{-1} \Leftrightarrow S^{-1}\ A^{-1}\ (S^{-1})^{-1} = \Delta^{-1} \Leftrightarrow S^{-1}\ A^{-1}\ S = \Delta^{-1}$. Ainsi l'inverse d'une matrice diagonale est une matrice diagonale.

(n) **Si $A$ est diagonalisable, alors $A^2$ l'est aussi.**
Vrai car si $S$ est inversible tel que $S^{-1}AS = \Delta$ ($\Delta$ matrice diagonale) alors $(S^{-1}AS)(S^{-1}AS) = \Delta^2$ et vu l'associativité du produit matriciel, on a $S^{-1}(AS\ S^{-1}A)S = S^{-1}A^2S = \Delta^2$ et le carré d'une matrice diagonale est un matrice diagonale.

(o) **Les valeurs propres de l'inverse d'une matrice inversible sont les inverses des valeurs propres de la matrice.**
Vrai. De fait, pour tout vecteur $X \neq 0$ on a

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow A^{-1}AX = \lambda A^{-1}X \Leftrightarrow X = \lambda A^{-1}X \Leftrightarrow A^{-1}X = (1/\lambda)X$$

car $A$ étant inversible, ses valeurs propres sont non nulles (voir (j) ci-dessus).
Autre justification possible : considérons le polynôme caractéristique. On a

$$\det(A-\lambda\mathbb{1}) = \det(A-\lambda AA^{-1}) = \det(A(\mathbb{1}-\lambda A^{-1})) = \det(A)\ \det(\mathbb{1}-\lambda A^{-1})$$

puisqu'on travaille avec des matrices carrées de même dimension.
Dès lors, si $A$ est une matrice carrée de dimension $n$, on a

$$\det(A-\lambda\mathbb{1}) = \det(A)\ \det\left(\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\mathbb{1}-A^{-1}\right)\right) = \det(A)\ \lambda^n\ \det\left(\frac{1}{\lambda}\mathbb{1}-A^{-1}\right).$$

Il s'ensuit que si $\lambda$ annule le polynôme caractéristique de $A$ alors $1/\lambda$ annule celui de $A^{-1}$ ; et réciproquement, si $\mu = 1/\lambda$ annule le polynôme caractéristique de $A^{-1}$ alors $\lambda$ annule celui de $A$.

(p) **La somme de deux matrices diagonalisables est toujours une matrice diagonalisable.**
Faux car on a, par exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

les deux matrices du membre de gauche étant diagonalisables mais non celle du membre de droite.

3. **La cryptographie, pour beaucoup de monde, est un moyen de maintenir des communications privées. En effet, la protection des communications sensibles a été l'objectif principal de la cryptographie dans la grande partie de son histoire. Le *chiffrage* est la transformation des données dans une forme illisible. Son but est d'assurer la sécurité en maintenant l'information cachée aux gens à qui l'information n'est pas adressée, même ceux qui peuvent voir les données chiffrées. Le *déchiffrage* est l'inverse du chiffrage ; c'est la transformation des données chiffrées dans une forme intelligible.**
**Aujourd'hui, les gouvernements emploient des méthodes sophistiquées de codage et de décodage des messages. Un type de code, qui est extrêmement difficile à déchiffrer, se sert d'une grande matrice pour coder un message. Le récepteur du message le décode en employant l'inverse de la matrice. Voici un exemple de codage/décodage d'un message par ce procédé.**
**Considérons le message**

**SUIS EN DANGER**

**ainsi que la matrice de codage**

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = C.$$

**Pour le codage, on assigne à chaque lettre de l'alphabet un nombre, à savoir simplement sa position dans l'alphabet, c'est-à-dire A correspond à $1$, B correspond à $2$, … , Z correspond à $26$. En outre, on assigne le nombre $27$ à un espace. Ainsi, le message devient :**

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **S** | **U** | **I** | **S** | ***** | **E** | **N** | ***** | **D** | **A** | **N** | **G** | **E** | **R** |
| **19** | **21** | **9** | **19** | **27** | **5** | **14** | **27** | **4** | **1** | **14** | **7** | **5** | **18.** |

**Puisqu'on emploie une matrice $2\times 2$, on décompose la forme numérique de ce message en une suite de vecteurs [2] $1\times 2$ :**

$$(19\quad 21),\ (9\quad 19),\ (27\quad 5),\ (14\quad 27),\ (4\quad 1),\ (14\quad 7),\ (5\quad 18).$$

2. Dans le cas où il faut compléter le dernier vecteur, il suffit d'y placer des « 27 », ce qui revient à compléter le message par des espaces pour avoir un nombre de caractères qui soit multiple de la dimension de la matrice de codage.

**On code alors le message en multipliant chacun de ces vecteurs par la matrice de codage $C$, ce qui peut être fait en définissant une matrice dont les lignes sont ces vecteurs et en multipliant cette dernière par $C$, ce qui nous donne :**

$$\begin{pmatrix} 19 & 21 \\ 9 & 19 \\ 27 & 5 \\ 14 & 27 \\ 4 & 1 \\ 14 & 7 \\ 5 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 25 \\ -10 & 39 \\ 22 & -39 \\ -13 & 53 \\ 3 & -5 \\ 7 & -7 \\ -13 & 44 \end{pmatrix}.$$

**Dès lors, le message crypté est donné par les lignes de cette dernière matrice que l'on place bout à bout pour la transmission :**

$$-2,\ 25,\ -10,\ 39,\ 22,\ -39,\ -13,\ 53,\ 3,\ -5,\ 7,\ -7,\ -13,\ 44.$$

**Enfin, pour décoder le message, le récepteur a recours à la même technique que celle employée pour le codage mais en utilisant l'inverse de la matrice de codage, qui est donnée ici par**

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Il doit donc calculer le produit**

$$\begin{pmatrix} -2 & 25 \\ -10 & 39 \\ 22 & -39 \\ -13 & 53 \\ 3 & -5 \\ 7 & -7 \\ -13 & 44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 21 \\ 9 & 19 \\ 27 & 5 \\ 14 & 27 \\ 4 & 1 \\ 14 & 7 \\ 5 & 18 \end{pmatrix}$$

**et il retrouve bien la matrice correspondant au message de départ, ce qui lui permet de lire le message :**

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **19** | **21** | **9** | **19** | **27** | **5** | **14** | **27** | **4** | **1** | **14** | **7** | **5** | **18** |
| **S** | **U** | **I** | **S** | ***** | **E** | **N** | ***** | **D** | **A** | **N** | **G** | **E** | **R.** |

**Le Gouvernement a réussi à intercepter le message crypté suivant, provenant de l'ennemi public n°1 et destiné à l'ennemi public n°2 :**

$-18,\ -21,\ -31,\ 53,\ 48,\ 61,\ 3,\ -15,\ -21,\ -34,\ -30,\ -43,\ 45,\ 42,\ 48.$

**L'un de ses meilleurs espions infiltrés, James Bond, a découvert que la matrice utilisée par l'ennemi pour coder ce message est la suivante :**

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Malheureusement, il n'y connaît rien en calcul matriciel et personne ne peut déchiffrer ce message... Votre mission est de décoder ce message dans les plus brefs délais.**

*Solution.* La matrice de décodage est donnée par l'inverse de la matrice de codage, c'est-à-dire la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ -4 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Le message est le suivant :

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 22 | 9 | 12 | 1 | 9 | 14 | 27 | 3 | 21 | 18 | 9 | 5 | 21 | 24 | 27 |
| V | I | L | A | I | N | * | C | U | R | I | E | U | X | *. |

# Table des matières